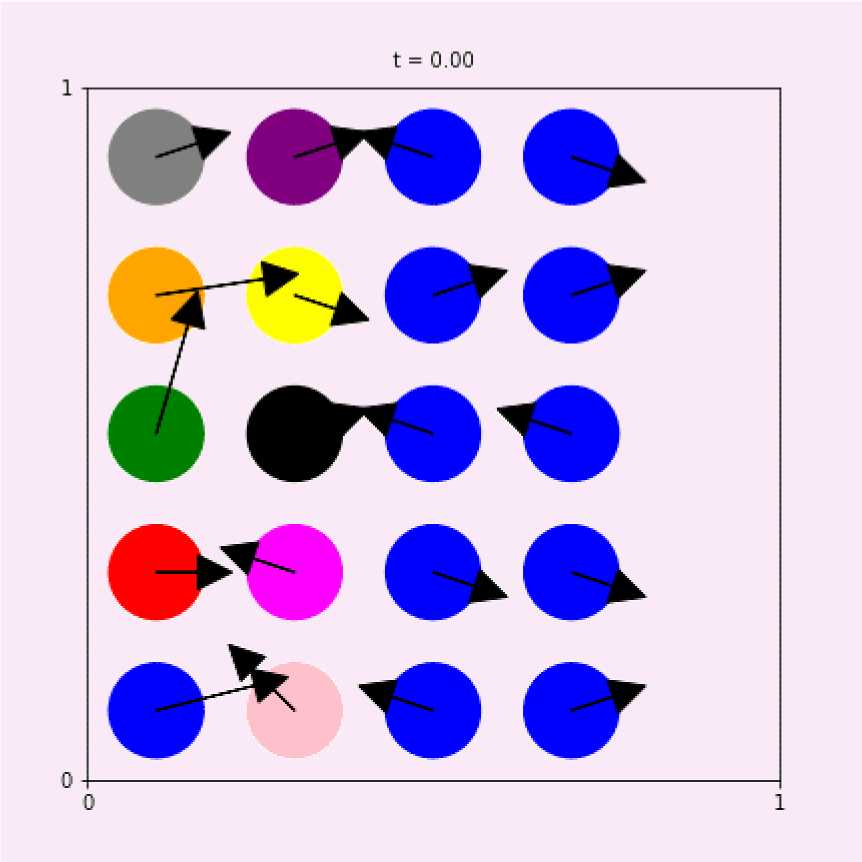


STATISTIČKA FIZIKA

Nerecenzirana zbirka zadataka za studente fizike

Verzija 2.2 (January 11, 2023)

Miloš Adamović

Univerzitet u Kragujevcu
Institut za fiziku
Kragujevac

E-mail: milos.adamovic@pmf.kg.ac.rs

Sadržaj

Predgovor

"Nema ništa praktičnije od (dobre) teorije"

— Ludvig Bolcman

Ova zbirka predstavlja skup zadataka koji se u velikoj meri rade u okviru predmeta Statistička fizika na Institutu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Kragujevcu. Zadaci predstavljeni u ovoj zbirci se mogu pronaći u istim ili adaptiranim formulacijama i u drugim zbirkama zadataka iz Statističke fizike. Autorski zadaci u ovoj zbirci biće naznačeni simbolom $\clubsuit$. Po akreditaciji ovaj predmet imaju studenti četvrte godine osnovnih akademskih studija fizike. Zbirku, pored studenata fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kragujevcu, mogu koristiti i svi studenti fizike koji takođe imaju predmet Statistička fizika na drugim fakultetima koji školuju buduće fizičare. Materijali predstavljeni u zbirci će vremenom biti menjani i dopunjavani. Ukoliko posle čitanja materijala predstavljenog u ovoj zbirci imate neki komentar ili sugestiju javite se na email **milos.adamovic@pmf.kg.ac.rs**, svaka sugestija je dobrodošla.

Miloš Adamović

PART

I

Fenomenološka termodinamika

1 Termodinamika

Zadatak 1. Za dve date funkcije $z = z(x, y)$ i $w = w(x, y)$ dokazati da važe sledeće relacije:

(i) $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$,

(ii) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -1$,

(iii) $\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_x = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_x$,

(iv) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_w$.

Rešenje:

Polazeći od

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{1.1}$$

i

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz \tag{1.2}$$

dobijamo

$$dy = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right] dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{1.3}$$

ili

$$0 = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right] dx + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x - 1\right] dy \tag{1.4}$$

Prvo imamo:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x - 1 = 0 \tag{1.5}$$

1.

ili:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} \quad \square \tag{1.6}$$

Dalje dobijamo:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 0 \tag{1.7}$$

i iz toga takođe:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad \square \tag{1.8}$$

Dodatno, polazeći od:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{1.9}$$

i takođe:

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_x dw + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_w dx \tag{1.10}$$

kao kombinovani rezultat imamo:

$$dz = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_w\right] dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_x dw \tag{1.11}$$

što poredimo sa:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w dx + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_x dw \tag{1.12}$$

1.

Prvo se dobija:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_w \quad \square \tag{1.13}$$

i još:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_x = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_x \quad \square \tag{1.14}$$

Zadatak 2. Odrediti da li sledeće diferencijalne forme predstavljaju totalne (egzaktne diferencijale):

(i) $dA = \left(\frac{2}{V} + \frac{V}{T}\right) dT + \left(\frac{3V}{T} + 2\right) dV$,

(ii) $dB = pdV - V dp$,

(iii) $dC = p^2 dT - \frac{T^2}{p} dp$,

(iv) $dF = 2TV dT + T^2 dV$,

(v) $dG = 3T(Tp - 2)dT + (T^3 + 2p)dp$.

Rešenje:

Znamo da za prvu diferencijlnu formu važi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V &= \frac{2}{V} + \frac{V}{T} \\ \left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T &= \frac{3V}{T} + 2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Proveravamo definiciju egzaktnog diferencijala:

2.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial V} \tag{1.16}$$

i dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{2}{V} + \frac{V}{T}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3V}{T} + 2\right)_V$$

$$-\frac{2}{V^2} + \frac{1}{T} \neq -\frac{3V}{T^2}$$

te stoga zaključujemo da dA nije totalni diferencijal.
Dalje, znamo da za drugu diferencijalnu formu važi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial V}\right)_p &= p \\ \left(\frac{\partial B}{\partial p}\right)_V &= -V \end{aligned} \tag{1.17}$$

Testiramo da li je totalni diferencijal:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p \partial V} = \frac{\partial^2 B}{\partial V \partial p} \tag{1.18}$$

i dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p}(p)_V &= \frac{\partial}{\partial V}(-V)_p \\ 1 &\neq -1 \end{aligned} \tag{1.19}$$

pa zaključujemo da dB nije totalni diferencijal.
Dalje, znamo da za treću diferencijalnu formu važi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)_p &= p^2 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial p}\right)_T &= -\frac{T^2}{p} \end{aligned} \tag{1.20}$$

2.

Testiramo da li je totalni diferencijal:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 C}{\partial T \partial p} \tag{1.21}$$

i dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p}\left(p^2\right)_T &= \frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{T^2}{p}\right)_p \\ 2p &= -\frac{2T}{p} \end{aligned} \tag{1.22}$$

pa zaključujemo da dC nije totalni diferencijal.
Dalje, znamo da za četvrtu diferencijalnu formu važi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V &= 2TV \\ \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T &= T^2 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Testiramo da li je totalni diferencijal:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} \tag{1.24}$$

i dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(2TV\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\left(T^2\right)_V \\ 2T = 2T \tag{1.25}$$

pa zaključujemo da dF jeste totalni diferencijal.
Dalje, znamo da za petu diferencijalnu formu važi:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = 3T(Tp-2) \\ \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = T^3 + 2p \tag{1.26}$$

2.

Testiramo da li je totalni diferencijal:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T} = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} \tag{1.27}$$

i dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(3T^2 p - 6T\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\left(T^3 + 2p\right)_p \\ 3T^2 = 3T^2 \tag{1.28}$$

pa zaključujemo da dG jeste totalni diferencijal.

Zadatak 3. Odrediti relaciju koja predstavlja vezu između kaloričke $U = U(T,V)$ i termičke jednačine stanja $p = p(T,V)$ za termomehanički sistem.

Rešenje (I način):

Polazimo od:

$$dU = TdS - pdV \tag{1.29}$$

i koristimo funkcionalne zavisnosti:

$$U = U(T,V) \\ S = S(T,V) \tag{1.30}$$

Sada (1.29) dobija oblik:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV\right] - pdV \tag{1.31}$$

3.

Razdvajanjem, dobijamo:

$$\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + p\right]dV + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V - T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right]dT = 0 \tag{1.32}$$

Poređenjem obe strane jednačine dobijamo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + p = 0 \tag{1.33}$$

Dodatno, na osnovu Meksvelove termodinamičke relacije:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{1.34}$$

3.

konačno dobijamo traženu vezu:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{1.35}$$

Rešenje (II način):

Polazimo od diferencijalne forme slobodne energije $F = F(T,V)$:

$$\begin{aligned} dF &= \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV \\ dF &= -SdT - pdV \end{aligned} \tag{1.36}$$

Dodatno, koristimo vezu slobodne energije i unutrašnje energije:

$$F = U - TS \tag{1.37}$$

koju diferenciramo po zapremini, a pri konstantnoj temperaturi:

3.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \tag{1.38}$$

i dobijamo:

$$-p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{1.39}$$

gde smo u prethodnoj relaciji iskoristili i jednu poznatu Meksvelovu termodinamičku relaciju. Ponovo smo potvrdili da važi veza:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{1.40}$$

Zadatak 4. Odrediti odgovarajuće Meksvelove termodinamičke jednačine iz uslova za totalni diferencijal diferencijalnih formi unutrašnje energije U, slobodne energije F, Gibsovog termodinamičkog potencijala G i entalpije E.

Rešenje

Polazimo od diferencijalne forme unutrašnje energije $U = U(S,V)$:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \tag{1.41}$$

dok korisćenjem Bornovog četvorougla znamo da se može pisati dalje:

4

$$dU = TdS - pdV \tag{1.42}$$

Uslov za totalni diferencijal je:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \tag{1.43}$$

što je zaista jedna od Meksvelovih termodinamičkih relacija. Dalje, za slobodnu energiju $F(T,V)$ imamo:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV = -SdT - pdV \tag{1.44}$$

a uslov za totalni diferencijal i još jedna Meskvelova relacija je:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \tag{1.45}$$

Diferencijal Gibsovog termodinamičkog potencijala $G = G(p,T)$:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = -SdT + Vdp \tag{1.46}$$

4

a iz uslova za njegov totalni diferencijal imamo sledeću Meksvelovu relaciju:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.47}$$

Na kraju diferencijal entalpije $E = E(S,p)$:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_p dS + \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_S dp = TdS + Vdp \tag{1.48}$$

a uslov totalnog diferencijala entalpije daje Meksvelovu relaciju:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \tag{1.49}$$

Zadatak 5. Odrediti vezu između datih funkcija odziva:

$$\alpha_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \ \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \ \beta_V = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

koristeći osobine Jakobijana.

Rešenje

Polazimo od definicije koeficijenta izobarnog termičkog širenja i koristeći osobine Jakobijana dobijamo:

$$\begin{aligned}
\alpha_p &= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V}\frac{\partial(V,p)}{\partial(T,p)} \\
&= -\frac{1}{V}\frac{\partial(V,p)}{\partial(p,T)} \\
&= -\frac{1}{V}\frac{\partial(V,p)}{\partial(V,T)}\frac{\partial(V,T)}{\partial(p,T)} \\
&= -\frac{1}{V}\frac{\partial(p,V)}{\partial(T,V)}\frac{\partial(V,T)}{\partial(p,T)} \\
&= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \\
&= -\frac{1}{V}(p\beta_V)(-V\kappa_T) = p\beta_V\kappa_T \quad \square
\end{aligned} \tag{1.50}$$

5

Zadatak 6. Dokazati da između adijabatske kompresibilnosti:

$$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$$

i izotermske kompresibilnosti:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

termomehaničkog sistema, postoji veza:

$$\kappa_T = \frac{C_p}{C_V}\kappa_S$$

gde su C_p i C_V odgovarajući toplotni kapaciteti.

Rešenje (I način):

Polazeći od odnosa:

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_T}{\kappa_S} &= \frac{-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S} = \frac{\frac{\partial(V,T)}{\partial(p,T)}}{\frac{\partial(V,S)}{\partial(p,S)}} \\
&= \frac{\partial(V,T)}{\partial(V,S)}\frac{\partial(p,S)}{\partial(p,T)} = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \\
&= \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V T} \\
\frac{\kappa_T}{\kappa_S} &= \frac{C_p}{C_V} \quad \square
\end{aligned} \tag{1.51}$$

6

što je i trebalo dokazati.

Rešenje (II način):

Pođimo od:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T &= \frac{\partial(V,T)}{\partial(p,T)} \\
&= \frac{\partial(V,T)}{\partial(V,S)}\frac{\partial(V,S)}{\partial(p,S)}\frac{\partial(p,S)}{\partial(p,T)} \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p
\end{aligned} \tag{1.52}$$

6

Množenjem obe strane prethodne jednačine sa $-1/V$ dobijamo:

$$-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{V}\frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p\frac{T}{T} \tag{1.53}$$

Konačno dobijamo:

$$\kappa_T = \frac{C_p}{C_V}\kappa_S \quad \square \tag{1.54}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 7. Dokazati da za razlike toplotnih kapaciteta važe sledeće relacije:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$
$$C_p - C_V = -T\left(\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Rešenje:

Polazimo od definicije toplotnog kapaciteta pri konstantnom pritisku:

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \tag{1.55}$$

koju dalje raspisujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
C_p &= T\frac{\partial(S,p)}{\partial(T,p)} \\
&= T\frac{\partial(S,p)}{\partial(T,V)}\frac{\partial(T,V)}{\partial(T,p)} \\
&= T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T - \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \\
&= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \\
&= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\
&= C_V - T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\
&= C_V + T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\
C_p - C_V &= T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad \square
\end{aligned} \tag{1.56}$$

7

gde smo prethodno iskoritili nekoliko veza:

$$\begin{aligned}
C_V &= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \\
\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T &= \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \\
\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Dalje ukoliko krenemo od izraza:

$$C_p - C_V = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{1.58}$$

i zamenimo jedan deo Meksvelovom relacijom $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ dobijamo dodatno:

$$C_p - C_V = -T\left(\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \quad \square \tag{1.59}$$

Zadatak 8. Jednačina stanja gasa je data sledećom relacijom:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Gas trpi izotermnu promenu zapremine sa V_1 na V_2. Izračunati promenu slobodne energije gasa.

Rešenje:

Polazimo od diferencijala slobodne energije $F = F(T, V)$:

$$dF = -pdV - SdT \tag{1.60}$$

odnosno pri konstantnoj temperaturi:

$$dF = -pdV \tag{1.61}$$

Promena slobodne energije je data kao:

$$\Delta F = \int_A^B dF = \int_{V_1}^{V_2} -pdV \tag{1.62}$$

Na osnovu jednačine stanja imamo:

$$-p = \frac{a}{V^2} - \frac{RT}{V - b} \tag{1.63}$$

8

Tako imamo:

$$\begin{aligned}
\Delta F &= \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{a}{V^2} - \frac{RT}{V-b}\right) dV \\
&= a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} - RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V-b} \\
&= -a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) - RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \\
&= -a\frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} - RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \\
\Delta F &= a\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2} + RT \ln \frac{V_1 - b}{V_2 - b}
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Zadatak 9. Dokazati da za idealni gas važi tzv. Majerova relacija:

$$C_p - C_V = nR$$

gde je n broj molova idealnog gasa, a R univerzalna gasna konstanta.

Rešenje:

Polazimo od poznate relacije:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.65}$$

9

Znamo da za idealni gas važe relacije:

$$pV = nRT \rightarrow p = \frac{nRT}{V}, V = \frac{nRT}{p} \tag{1.66}$$

Prvo određujemo:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{nRT}{V}\right)_V = \frac{nR}{V} \tag{1.67}$$

9

Zatim određujemo:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{nRT}{p}\right)_p = \frac{nR}{p} \tag{1.68}$$

Konačno dobijamo:

$$C_p - C_V = T\frac{nR}{p}\frac{nR}{V} = \frac{n^2R^2T}{\frac{nRT}{V}V} = nR \quad \square \tag{1.69}$$

Zadatak 10. Odrediti razliku toplotnih kapaciteta $C_p - C_V$ za gas koji se pokorava navedenim jednačinama stanja:

$$pV = RT$$
$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$$

Rešenje:

Znajući da važi relacija:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.70}$$

Razmatramo prvu jednačinu stanja i zaključujemo da:

$$p = \frac{RT}{V} \qquad V = \frac{RT}{p} \tag{1.71}$$

i na osnovu toga imamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V &= \frac{R}{V} \\ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= \frac{R}{p} \end{aligned} \tag{1.72}$$

10

Za raziku toplotnih kapaciteta za prvu jednačinu stanja dobijamo:

$$C_p - C_V = R \tag{1.73}$$

Ukoliko posmatramo drugu jednačinu stanja lako dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} p &= \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \\ T &= \frac{1}{R}\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) \end{aligned} \tag{1.74}$$

Na osnovu toga u drugom slučaju imamo:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \tag{1.75}$$

i dodatno:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p} = \frac{RV^3}{2ab - aV + pV^3} \tag{1.76}$$

10

Konačno za drugu jednačinu stanja dobijamo:

$$C_p - C_V = T\frac{R}{V-b}\frac{RV^3}{2ab - aV + pV^3} \tag{1.77}$$

Zadatak 11. Dokazati da unutrašnja energija ne zavisi od zapremine sistema, ako je termička jednačina stanja sistema data relacijom:

$$p = f(V)T$$

gde $f(V)$ predstavlja neku funkciju samo od zapremine.

Rešenje:

Koristimo se ranije određenom vezom:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{1.78}$$

11

Zamenom termičke jednačine stanja dobijamo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial}{\partial T}(f(V)T)\right)_V - p = Tf(V) - f(V)T = 0 \quad \square \tag{1.79}$$

Zadatak 12. Termička i kalorička jednačina stanja za neki termodinamički sistem date su kao:

$$p = \frac{AT^3}{V}$$

i

$$U = BT^n \ln\frac{V}{V_0} + f(T)$$

respektivno. A, B, n, V_0 su konstante a $f(T)$ je neka funkcija koja zavisi samo od temperature. Odrediti B i n.

Rešenje:

Polazeći od veze:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{1.80}$$

prvo određujemo:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{3AT^2}{V} \tag{1.81}$$

12

i dodatno:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = BT^n\frac{V_0}{V}\frac{1}{V_0} = \frac{BT^n}{V} \tag{1.82}$$

Raspisivanjem:

$$T\frac{3AT^2}{V}-\frac{AT^3}{V}=\frac{BT^n}{V}$$
$$\frac{2AT^3}{V}=\frac{BT^n}{V} \tag{1.83}$$
$$2AT^3=BT^3$$

12

i poređenjem zaključujemo:

$$B=2A, n=3 \tag{1.84}$$

Zadatak 13. Dokazati da važi relacija:

$$C_p-C_V=T\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T} \tag{1.85}$$

gde je F slobodna energija sistema, a T njegova temperatura.

Rešenje:

Polazimo od relacije:

$$C_p-C_V=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.86}$$

i koristimo vezu pritiska i slobodne energije:

$$p=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \tag{1.87}$$

Na osnovu toga imamo:

$$C_p-C_V=-T\left(\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.88}$$

Dodatno određujemo:

13

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{\partial(V,p)}{\partial(T,p)}=\frac{\partial(V,p)}{\partial(V,T)}\frac{\partial(V,T)}{\partial(T,p)}=-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{1.89}$$

Na kraju imamo:

$$C_p-C_V=T\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$
$$C_p-C_V=-T\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} \tag{1.90}$$
$$C_p-C_V=T\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)}\quad\square$$

Zadatak 14. Dokazati važenje sledeće relacije:

$$C_p-C_V=VT\frac{\alpha_p^2}{\kappa_T} \tag{1.91}$$

gde su α_p i κ_T ranije definisane funkcije odziva.

Rešenje:

Polazeći od relacije:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.92}$$

i presećanjem veza i definicija:

$$\begin{aligned} \kappa_T &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \\ \alpha_p &= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \\ \beta_V &= \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\ \alpha_p &= p\beta_V\kappa_T \end{aligned} \tag{1.93}$$

14

Lako vidimo da se (1.92) može zapisati u obliku:

$$C_p - C_V = TpV\beta_V\alpha_p = VT\frac{\alpha_p^2}{\kappa_T} \quad \square \tag{1.94}$$

Zadatak 15. Dokazati da važi sledeća relacija:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

Rešenje:

Polazimo od zakona:

$$TdS = dU + pdV \tag{1.95}$$

Raspisujemo diferencijalnu formu za $U = U(T, V)$:

$$TdS = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + pdV \tag{1.96}$$

Pri konstantnoj zapremini:

$$\delta Q = TdS = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \tag{1.97}$$

15

Koristeći definiciju toplotnog kapaciteta:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V \tag{1.98}$$

dobijamo:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad \square \tag{1.99}$$

Zadatak 16. Dokazati da važi sledeća relacija:

$$C_p = \left(\frac{\delta U}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Rešenje:

Ukoliko razmatramo unutrašnju energiju i zapreminu sistema kao funkcije pritiska i temperature, polazeći od:

$$\delta Q = dU + pdV \tag{1.100}$$

imamo:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T dp + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp \tag{1.101}$$

Pri konstantnom pritisku se dobija:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT \tag{1.102}$$

16

i korišćenjem definicije toplotnog kapaciteta pri konstantnom pritisku:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p \tag{1.103}$$

zaključujemo da važi:

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad \square \tag{1.104}$$

Zadatak 17. Dokazati da iz III zakona termodinamike sledi da toplotni kapacitet teži nuli kada temperatura teži nuli.

Rešenje:

Definicija toplotnog kapaciteta u opštem slučaju bi bila:

$$C_x = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x \tag{1.105}$$

gde x predstavlja konstantnu veličinu, poznati toplotni kapaciteti za $x = p, V$. Treći zakon termodinamike možemo napisati u obliku:

$$\lim_{T\to 0} S = 0 \tag{1.106}$$

17

Ukoliko malo modifikujemo prethodni izraz:

$$\lim_{T\to 0} S = \lim_{T\to 0} \frac{TS}{T} = \lim_{T\to 0} \frac{\left(\frac{\partial (TS)}{\partial T}\right)_x}{\left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_x} = \lim_{T\to 0}\left(S + T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x\right) = \lim_{T\to 0} S + \lim_{T\to 0} C_x \tag{1.107}$$

gde smo iskoristili opštu definiciju toplotnog kapaciteta i Lopitalovo pravilo, dobijamo na kraju da:

$$\lim_{T\to 0} C_x = 0 \tag{1.108}$$

Zadatak 18. Jedan mol idealnog gasa na početnoj temperaturi T_0 promeni zapreminu sa V_0 na $2V_0$: a) pri konstantnoj temperaturi, b) pri konstantnom pritisku. Naći rad koji je gas izvršio pri širenju i apsorbovanu količinu toplote pri tome.

Rešenje:

Rad koji je izvršio 1 mol idealnog gasa $pV = RT$ na konstantnoj temperaturi pri širenju se određuje:

$$\Delta W = \int_A^B pdV = RT_0 \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = RT_0 \ln 2 \tag{1.109}$$

Unutrašnja energija idealnog gasa je $U = \frac{3}{2}RT = U(T)$. Pošto unutrašnja energija zavisi samo od temperature, količina toplote koja se apsobuje pri konstantnoj temperaturi je:

$$\Delta Q = \underbrace{\Delta U}_{0} + \Delta W = RT_0 \ln 2 \tag{1.110}$$

Dalje pri konstantnom pritisku rad koji gas izvrši je: 18

$$\Delta W = \int_{V_0}^{2V_0} pdV = p(2V_0 - V_0) = pV_0 = RT_0 \tag{1.111}$$

Dalje, promena unutrašnje energije:

$$\Delta U = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{3}{2} pdV = \frac{3}{2} pV_0 = \frac{3}{2} RT_0 \tag{1.112}$$

a apsorbovana količina toplote u ovom slučaju je:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = \frac{5}{2} RT_0 \tag{1.113}$$

Zadatak 19. Dokazati da su infinitezimalne promene rada i količine toplote za termomehanički sistem nepotpuni (neegzaktni) diferencijali.

Rešenje:

Polazeći od $dW = pdV$ za $V = V(p,T)$ možemo pisati:

$$dW = pdV = p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp\right] \tag{1.114}$$

Uslov za totalni diferencijal rada bi bio:

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right)_p \tag{1.115}$$

iz koga dobijamo: 19

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + p\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial T} = p\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial p} \tag{1.116}$$

i da bi prethodni izraz bio zadovoljen mora da važi:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0 \tag{1.117}$$

što u opštem slučaju nije tako, pa stoga rad termomehaničkog sistema nije egzaktni diferencijal i obično se daje u oznaci δW umesto dW.

Slično, za količinu toplote $dQ = dU + pdv$ i $U = U(T,V)$ imamo:

$$dQ = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \tag{1.118}$$

Uslov za totalni (egzaktni) diferencijal je:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right)_T \tag{1.119}$$

što nam daje: 19

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \tag{1.120}$$

Da bi infinitezimalna promena količine toplote bila totalni diferencijal mora da važi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0 \tag{1.121}$$

što u opštem slučaju ne važi. Stoga infinitezimalna promena količine toplote nije egzaktni diferencijal i obično se koristi oznaka δQ umesto dQ.

Zadatak 20. Polazeći od relacije:

$$TdS = dU - pdV$$

proveriti važenje relacije:

$$\frac{\partial(p,V)}{\partial(T,S)} = 1$$

Rešenje:

Ukoliko krenemo od funkcija $U = U(x,y)$, $S = S(x,y)$, $V = V(x,y)$ dobijamo za oblik polazne relacije zadatka:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_x dy\right] - p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_x dy\right] \tag{1.122}$$

iz čega poređenjem imamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y &= T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y - p\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_y \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x &= T\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_x - p\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_x \end{aligned} \tag{1.123}$$ 20

Uslov za totalni diferencijal U je:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{1.124}$$

odakle se dobija:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y + T\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_y - p\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_x + T\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_x - p\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \tag{1.125}$$

Dalje imamo:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_x \tag{1.126}$$

odnosno:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_y-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_x \tag{1.127}$$

U prethodnom koraku prepoznajemo definiciju Jakobijana:

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(y,x)}=\frac{\partial(p,V)}{\partial(y,x)} \tag{1.128}$$ 20

Zajedničkim množenjem oblika:

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(y,x)}\cdot\frac{\partial(y,x)}{\partial(T,S)}=\frac{\partial(p,V)}{\partial(y,x)}\cdot\frac{\partial(y,x)}{\partial(T,S)} \tag{1.129}$$

dobijamo konačno:

$$\frac{\partial(p,V)}{\partial(T,S)}=1 \quad \square \tag{1.130}$$

Odabirom odgovarajućih parova za parametre x i y mogu se dobiti i Meksvelove termodinamičke relacije.

Zadatak 21. Za neko čvrsto telo eksperimentalno je utvrđeno da u oblasti pritiska $p_1 \leq p \leq p_2$ njegov koeficijent izobarnog termičkog širenja ima sledeći tip zavisnosti od pritiska:

$$\alpha_p=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{V}(a+bp+cp^2)$$

gde su a, b, c konstante. Za koliko će se promeniti entropija ovog tela pri izotermnom sabijanju od p_1 do p_2?

Rešenje:

Tražimo promenu entropije $S=S(T,p)$:

$$\Delta S=\int_{p_1}^{p_2} dS=\int_{p_1}^{p_2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p+\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp\right] \tag{1.131}$$

Pri konstantnoj temperaturi (izotermni proces) imamo:

$$\Delta S=\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp \tag{1.132}$$ 21

Dodatno koristimo Meksvelovu termodinamičku relaciju:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.133}$$

tako da dobijamo:

$$\Delta S=-\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp \tag{1.134}$$

Iz definicije koeficijenta izobarnog termičkog širenja i njegovog oblika za dato čvrsto telo lako se zaključuje da važi:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = a + bp + cp^2 \tag{1.135}$$

21

Stoga za promenu entropije imamo:

$$\Delta S = \int_{p_1}^{p_2} (a + bp + cp^2)dp = a(p_1 - p_2) + \frac{b}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \frac{c}{3}(p_1^3 - p_2^3) \tag{1.136}$$

Zadatak 22. Koeficijent izobarnog termičkog širenja α_p za vodu je negativan pri temperaturama $0°C \le t \le 4°C$. Pokazati da će u tom intervalu temperatura reverzibilno adijabatsko sabijanje imati za posledicu njeno hlađenje a ne zagrevanje.

Rešenje:

Polazeći od:

$$TdS = dU + pdV \tag{1.137}$$

Raspisivanjem diferencijalne forme unutrašnje enegije $U = U(T, V)$ i dodatno znajući da pri adijabatskom procesu $\delta Q = TdS = 0$ dobijamo:

$$0 = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + pdV \tag{1.138}$$

Dalje koristimo i veze:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p, C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{1.139}$$

Na osnovu uvedenih veza se dobija:

$$0 = C_V dT - pdV + pdV + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \tag{1.140}$$

Parcijalni izvod u prethodnoj relaciji ćemo izraziti preko izobarnog termičkog koefi- 22
cijenta širenja i izotermske kompresibilnosti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V &= \frac{\partial(p, V)}{T, V} = \frac{\partial(p, V)}{\partial(p, T)}\frac{\partial(p, T)}{\partial(T, V)} \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right) \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{-1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}\frac{V}{V} = \frac{\alpha_p}{\kappa_T} \end{aligned} \tag{1.141}$$

Na osnovu toga imamo konačno:

$$\begin{gathered} 0 = C_V dT + T\frac{\alpha_p}{\kappa_T}dV \\ -C_V = T\frac{\alpha_p}{\kappa_T}dV \to dT = -\frac{\alpha_p T}{\kappa_T C_V}dV \end{gathered} \tag{1.142}$$

Zaključujemo, na osnovu prethodne relacije, da će sabijanje vode imati za posledicu njeno hlađenje a ne zagrevanje.

Zadatak 23. Izvesti jednačinu adijabatskog procesa za idealni gas.

Rešenje:

Polazeći od

$$\delta Q = dU + \delta W \tag{1.143}$$

Znamo da za idealni gas važi:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \tag{1.144}$$

jer je $U = \frac{3}{2}Nk_BT$. Dalje imamo:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + pdV \tag{1.145}$$

odnosno pri adijabatskom procesu $\delta Q = 0$:

$$\begin{aligned} C_V dT + pdV &= 0 \\ C_V dT + \frac{nRT}{V}dV &= 0 \\ C_V dT + \frac{T(C_P - C_V)}{V}dV &= 0 \\ \frac{dT}{T} + \frac{C_p - C_V}{C_V V}dV &= 0 \\ \frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} &= 0 \end{aligned} \tag{1.146}$$

23

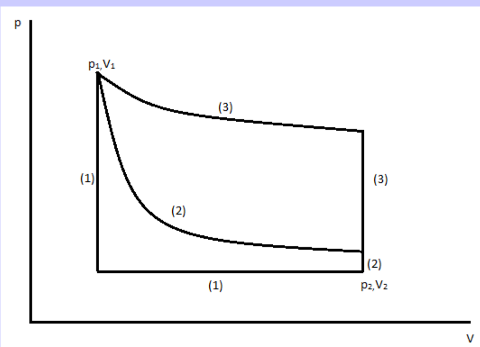
gde smo iskoristili Majerovu relaciju a odnos toplotnih kapaciteta C_p/C_V je označeno sa γ tzv. Poasonov koeficijent. Integraljenje dobijamo:

$$\ln T + (\gamma - 1)\ln V = const \tag{1.147}$$

odnosno:

$$TV^{\gamma-1} = const \tag{1.148}$$

Zadatak 24. Idealni gas sa termičkom i kaloričkom jednačinom stanja $pV = Nk_BT$ i $U = \frac{3}{2}Nk_BT$ respektivno, prevodi se reverzibilno iz stanja 1 u stanje 2 na tri različita načina (videti sliku). Naći u sva tri slučaja rad koji je sistem izvršio.



Slika 1. Slika uz Zadatak 24.

Rešenje:

Prvi način prevođenja gasa iz početnog u finalno stanje se sastoji od izohornog i izobarnog procesa, rad koji je sistem izvršio je:

$$W_{(1)} = \int_1^2 pdV = \int_{V_1}^{V_2} = p_2(V_2 - V_1) \tag{1.149}$$

Drugi način se sastoji od adijabatskog i izohornog procesa, rad koji sistem izvrši u ovom procesu je:

24

$$W_{(2)} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma}\left[V_2^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right] \tag{1.150}$$

Treći način prevođenja sistema iz početnog u finalno stanje se sastoji od izotermnog i izohornog procesa, i rad koji sistem izvrši pri tome je:

$$W_{(3)} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT \ln\frac{V_2}{V_1} \tag{1.151}$$

Zadatak 25. Termička i kalorička jednačina stanja za klasični realni gas (1 mol gasa) su date:

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$$
$$U = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{V}$$

Odrediti toplotne kapacitete C_p i C_V za ovaj gas.

Rešenje:

Znamo za početak:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}R \tag{1.152}$$

Dalje koristimo:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.153}$$

Prvo odredimo:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V - b} \tag{1.154}$$

Takođe znamo da važi:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p} \tag{1.155}$$

25

Poznato je iz termičke jednačine da je:

$$T = \frac{1}{R}(p + \frac{a}{V^2})(V - b) \tag{1.156}$$

i stoga:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{1}{R}\frac{pV^3 - aV + 2ab}{V^3} \tag{1.157}$$

pa na osnovu toga imamo:

$$C_p = \frac{3}{2}R + \frac{RT}{V - b}\frac{RV^3}{pV^3 - aV + 2ab} \tag{1.158}$$

Zadatak 26. Izračunati brzinu promene temperature gasa sa pritiskom pri konstantnoj enetropiji $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$ u zavisnosti od funkcija odziva α_p i C_p.

Rešenje:

Poznate su nam definicije funkcija odziva:

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V}\frac{\partial(V,p)}{\partial(T,p)} \\ C_p &= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = T\frac{\partial(S,p)}{\partial(T,p)}\end{aligned} \tag{1.159}$$

Na osnovu toga krećemo od:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{\partial(T,S)}{\partial(p,S)} = \frac{\partial(T,S)}{\partial(T,p)}\frac{\partial(T,p)}{\partial(p,S)} \tag{1.160}$$

26

Dalje imamo:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(-\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{-T}{C_p}\right) \tag{1.161}$$

Na kraju je jasno dobijeno:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = VT\frac{\alpha_p}{C_p} \tag{1.162}$$

Zadatak 27. Ispitati kako se C_p menja sa pritiskom i C_V sa zapreminom pri izotermnim reverzibilnim procesima za gasa čija je termička jednačina stanja $pV = RT$.

Rešenje:

Prvo tražimo izraz koji opisuje promenu C_p sa pritiskom pri konstantnoj temperaturi:

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}\left(T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p\right)_T = T\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T} = T\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial p} = T\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T\right)_p \tag{1.163}$$

Znamo da važi:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V \tag{1.164}$$

pa dobijamo:

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p \tag{1.165}$$

27

Slično imamo dalje za promenu C_V sa zapreminom:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}\left(T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right)_T = T\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = T\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = T\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right)_V \tag{1.166}$$

Pošto znamo da važi:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{1.167}$$

pa imamo:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V \tag{1.168}$$

Za termičku jednačinu $pV = RT$ dobijamo da su promene toplotnih kapaciteta:

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = 0 \qquad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = 0 \tag{1.169}$$

27

Zadatak 28. Entropiju sistema sličnog klasičnom idealnom gasu možemo zapisati kao:

$$S(U,V,N) = \frac{N}{N_0}S_0 + Nk_B \ln\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{V_0}\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-\frac{5}{2}}\right] \tag{1.170}$$

gde je U unutrašnja energija, V zapremina, N broj čestica, U_0, V_0, N_0, S_0 su konstante. Odrediti $F(T,V,N)$ i $G(T,p,N)$.

Rešenje:

Za idealni gas su kalorička i termička jednačina stanja date kao:

$$U = \frac{3}{2}Nk_BT \qquad pV = Nk_BT \tag{1.171}$$

Znajući vezu:

$$F = U - TS \tag{1.172}$$

dobijamo:

$$F(T,V,N) = \frac{3}{2}Nk_BT - T\left[\frac{N}{N_0}S_0 + Nk_B\ln\left[\left(\frac{\frac{3}{2}Nk_BT}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{V}{V_0}\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-\frac{5}{2}}\right]\right] \tag{1.173}$$

28

Druga veza koju koristimo je:

$$G = U - TS + pV = F + pV \tag{1.174}$$

pa dobijamo:

$$G(T,p,N) = \frac{5}{2}Nk_BT - T\left[\frac{N}{N_0}S_0 + Nk_B\ln\left[\left(\frac{\frac{3}{2}Nk_BT}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{V}{V_0}\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-\frac{5}{2}}\right]\right] \tag{1.175}$$

Zadatak 29. Dokazati važenje relacije:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V} - \mu = -T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,N}$$

Rešenje:

Polazeći od veze $F = U - TS$ koju diferenciramo po broju čestica pri konstantnoj zapremini i temperaturi:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V} - T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,V} \tag{1.176}$$

29

Dalje dobijamo:

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V} + T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial N \partial T}\right)_V \tag{1.177}$$

gde smo iskoristili veze:

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} \\ S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} \end{aligned} \tag{1.178}$$

29

Na kraju dobijamo:

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V} + T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,N} \quad \square \tag{1.179}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 30. Izračunati entropiju i odrediti jednačinu adijabatskog procesa sistema čija je gustina unutrašnje energije data relacijom:

$$u = \frac{U}{V} = \sigma T^4$$

Pored toga uzeti u obzir da je pritisak za taj sistem povezan sa gustinom unutrašnje energije vezom:

$$p = \frac{1}{3}u$$

Rešenje:

Polazimo od:

$$dU = TdS - pdV \tag{1.180}$$

Dodatno pravimo malo preuređenje jednačine:

$$\frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = dS \tag{1.181}$$

Dalje, ako odredimo diferencijalne forme za $U = U(V,T)$ i $S = S(V,T)$:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \frac{p}{T}dV \tag{1.182}$$

Poređenjem dobijamo:

30

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V &= \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T} \end{aligned} \tag{1.183}$$

Unutrašnju energiju možemo odrediti preko njene gustine:

$$U = uV = \sigma V T^4 \tag{1.184}$$

Na osnovu toga imamo:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = 4\sigma T^2 V \tag{1.185}$$

i:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{4}{3}\sigma T^3 \tag{1.186}$$

Integracijom određujemo entropiju:

$$S(T,V) = S_0 + \frac{4}{3}V\sigma T^3 \tag{1.187}$$

30

gde je S_0 konstanta koju dobijamo integracijom. Za konstantnu vrednost enetropije dobijamo jednačinu adijabatskog procesa:

$$VT^3 = const \tag{1.188}$$

Zadatak 31. Za magnetne sisteme i reverzibilne procese veza I i II zakona termodinamike glasi:

$$TdS = dU - HdM$$

ukoliko se zanemare promene zapremine, gde je H jačina magnetnog polja a M magnetizacija sistema. Uvodeći toplotne kapacitete pri konstantnoj magnetizaciji C_M i magnetnom polju C_H dokazati da između adijabatske susceptibilnosti χ_S i izotermske susceptibilnosti χ_T postoji veza:

$$\frac{\chi_S}{\chi_T} = \frac{C_M}{C_H}$$

Rešenje:

Polazeći od odnosa toplotnih kapaciteta:

$$\frac{C_M}{C_H} = \frac{T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M}{T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H} = \frac{\frac{\partial(S,M)}{\partial(T,M)}}{\frac{\partial(S,H)}{\partial(T,H)}} = \frac{\partial(T,H)}{\partial(T,M)}\frac{\partial(S,M)}{\partial(S,H)} \tag{1.189}$$

31

Dalje imamo:

$$\frac{C_M}{C_H} = \left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_S = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_S}{\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T} = \frac{\chi_S}{\chi_T} \quad Q.E.D. \tag{1.190}$$

Zadatak 32. U eksperimentu je utvrđeno da u određenoj oblasti temperature, magnetizacija M paramagnetnog tela zavisi od H/T tj. $M = f(H/T)$. Dokazati da unutrašnja energija ne zavisi od magnetizacije.

Rešenje:

Polazeći od relacije:

$$dU = TdS + HdM \tag{1.191}$$

i pisanjem diferencijalnih formi za funkcije $U = U(T,M)$ i $S = S(T,M)$:

32

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M dT + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T dM = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T dM + HdM \tag{1.192}$$

Poređenjem leve i desne strane prethodne relacije dobijamo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T + H \tag{1.193}$$

Nas interesuje veza:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T + H \tag{1.194}$$

a ukoliko iskoristimo relaciju:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M \tag{1.195}$$

32

dobijamo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = -T\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M + H \tag{1.196}$$

Na osnovu postavke zadatka jasno je da je:

$$H = Tf^{-1}(M) \tag{1.197}$$

pa je konačno:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = -Tf^{-1}(M) + H = 0 \quad Q.E.D. \tag{1.198}$$

Zadatak 33. Razmatramo paramagnet čija se magnetizacija pokorava Kirijevom zakonu $M = (C/T)H$ gde je C pozitivna konstanta i neka je kalorička jednačina stanja $U = aT^4$ gde je a opet neka pozitivna konstanta. Odrediti toplotu namagnetisavanja ovog magnetika kada se magnetno polje izotermno menja od 0 do H_0 na temperaturi T_0. Odrediti promenu temperature pri adijabatskom razmagnetisavanju ovog magnetika tj. pri adijabatskom smanjenju jačine magnetnog polja od H_0 do 0.

Rešenje:

Polazeći od:

$$TdS = dU - HdM \tag{1.199}$$

pri izotermnom procesu nema promene unutrašnje energije:

$$\delta Q = -HdM = -\frac{C}{T_0}HdH \tag{1.200}$$

Kada integralimo prethodnu relaciju, dobijamo:

33

$$Q = \int_0^{H_0} \delta Q = -\frac{C}{2T_0}H_0^2 \tag{1.201}$$

što predstavlja toplotu namagnetisavanja pri izotermnoj promeni magnetnog polja. Dalje razmatramo adijabatsko razmagnetisavanje. Znamo da važi:

$$dS = \frac{1}{T}(dU - HdM) = \frac{1}{T}\left(4aT^3dT - Hd\left(\frac{C}{T}H\right)\right) \tag{1.202}$$

dalje dobijamo:

$$dS = 4aT^2 dT - \frac{C}{T} H d\left(\frac{H}{T}\right) \tag{1.203}$$

odnosno posle intergracije:

$$S = \frac{4}{3} aT^3 - \frac{1}{2} C \left(\frac{H}{T}\right)^2 + S_0 \tag{1.204}$$

gde je S_0 generalna konstanta posle integracije. Entropija S polaznog stanja sa H_0, T_0 pri adijabatskom procesu mora biti jednaka entropiji S' krajnjeg stanja sa $T_0', H_0' = 0$, odnosno: 33

$$\frac{4}{3} aT_0^3 - \frac{1}{2} C \left(\frac{H_0}{T_0}\right)^2 = \frac{4}{3} aT_0'^3 \tag{1.205}$$

Vidimo da je temperatura na kraju adijabatskog razmagnetisavanja:

$$T_0'^3 = T_0^3 - \frac{3}{8} \frac{C}{a} \left(\frac{H_0}{T_0}\right)^2 \tag{1.206}$$

manja od temperature T_0, što znači da se magnetik hladi.

Zadatak 34. Odrediti razliku toplotnih kapaciteta $C_H - C_M$ za paramagnetik čija je izotermska susceptibilnost $\chi_T = C/T$, gde je C neka pozitivna konstanta.

Rešenje:

Polazimo od zakona $dU = TdS + HdM$ i koristimo definicije:

$$C_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M, C_H = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H \tag{1.207}$$

Dalje tretirajući unutrašnju energiju, entropiju i magnetizaciju kao funkcije temperature i jačine magnetnog polja, dobijamo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T dH = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T dH + H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dT + H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T dH \tag{1.208}$$

Posmatrajući prethodnu relaciju vidimo da važi:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H + H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \tag{1.209}$$ 34

Za početak određujemo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H &= \frac{\partial(U,H)}{\partial(T,H)} = \frac{\partial(U,H)}{\partial(T,M)} \frac{\partial(T,M)}{\partial(T,H)} \\
&= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M \left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T - \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M\right] \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T}_{1} - \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H
\end{aligned} \tag{1.210}$$

Polazni zakon dalje raspisujemo na jedan drugi način:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M dT + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T dM = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T dM + HdM \tag{1.211}$$

odakle izdvajamo vezu:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T + H \tag{1.212}$$

a dodatno korišćenjem Meksvelove termodinamičke relacije za magnetike, u obliku:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M \tag{1.213}$$

imamo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = -T\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M + H \tag{1.214}$$

Dalje, na osnovu (1.209) i definicije (1.207), imamo:

34

$$\begin{aligned}
C_H &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \\
&= C_M - T\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H + H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \\
&= C_M - T\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \\
C_H - C_M &= -T\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H
\end{aligned} \tag{1.215}$$

Za paramagnetik u našem primeru važi:

$$M = \chi_T H = \frac{C}{T}H \tag{1.216}$$

Odakle je:

$$C_H - C_M = C\frac{H^2}{T^2} \tag{1.217}$$

Zadatak 35. Dokazati da u termodinamičkoj ravnoteži sledeće funkcije odziva zadovoljavaju nejednakosti:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \geq 0$$
$$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \geq 0$$

Rešenje:

Razmatramo termidinamički sistem, npr. gas u termodinamičkoj ravnoteži na temperaturi T_0 i pritisku p_0. U termodinamičkoj ravnoteži entropija sistema je maksimalna. Gibsov termodinamički potencijal:

35

$$G = U - T_0 S + p_0 V \tag{1.218}$$

ima minimalnu vrednost u stanju termodinamičke ravnoteže.

Promena entropije, unutrašnje energije može dovesti do promene vrednosti:

$$dG = dU - T_0 dS + p_0 dV \geq 0 \tag{1.219}$$

Ukoliko izvršimo razvoj unutrašnje energije do drugog člana u razvoju u red, imamo:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V}_{T_0} dS + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S}_{-p_0} dV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} dS dV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} dV^2 - T_0 dS + p_0 dV \geq 0 \tag{1.220}$$

a dalje:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} dS dV + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} dV^2 \geq 0 \tag{1.221}$$

Na osnovu toga imamo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \geq 0 \tag{1.222}$$ 35

odnosno lako je zaključiti da važi:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \geq 0 \quad Q.E.D. \tag{1.223}$$

Razmatranjem dalje uslova:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \geq 0 \tag{1.224}$$

kao dodatni zaključak važi:

$$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \geq 0 \quad Q.E.D. \tag{1.225}$$

Zadatak 36. Dokazati sledeće nejednakosti:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_E < 0$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U > 0$$

Rešenje:

Polazeći od:

$$dU = TdS - pdV \tag{1.226}$$

pri konstantnoj unutrašnjoj energiji sistema imamo:

$$TdS = pdV \tag{1.227}$$ 36

odnosno lako se zaključuje da je:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T} > 0 \quad \square \tag{1.228}$$

Dalje ukoliko koristimo diferencijalnu formu entalpije:

$$dE = TdS + Vdp \tag{1.229}$$

pri konstantnoj entalpiji imamo:

$$-Vdp = TdS \tag{1.230}$$

odnosno sledi zaključak:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_E = -\frac{V}{T} < 0 \quad \square \tag{1.231}$$

36

Ukoliko prethodni način rešavanja nije toliko reprezentativan, rešenje možemo dokazati i primenom jakobijana. U prvom slučaju imamo:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_E = \frac{\partial(S,E)}{\partial(p,E)} = \frac{\partial(S,E)}{\partial(S,p)}\frac{\partial(S,p)}{\partial(p,E)} = -\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_S\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_p = -\frac{V}{T} < 0 \tag{1.232}$$

i drugi slično:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{\partial(S,U)}{\partial(V,U)} = \frac{\partial(S,U)}{\partial(S,V)}\frac{\partial(S,V)}{\partial(V,U)} = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{p}{T} > 0 \tag{1.233}$$

2 Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Proveriti da li su date diferencijalne forme egzaktni diferencijali:

$$dA = TV^2dT + T^2VdV$$
$$dB = e^TpdT + e^Tdp$$

Zadatak 2. Dokazati vazhenje Meksvelovih termodinamichkih relacija:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$$
$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

koristec1i vazhenje uslova totalnog diferencijala za entalpiju E i slobodnu energiju F.

Zadatak 3. Jednachina stanja gasa je data sledec1om relacijom:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

gde su a i b konstante. Gas trpi izotermnu promenu zapremine sa V_1 na V_2. Izrachunati promenu unutrashnje energije gasa, koristec1i poznatu vezu:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Zadatak 4. Koristec1i pogodnu Meksvelovu termodinamichku relaciju i osobine jakobijana dokazati da za termodinamichki sistem vazhi relacija:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$$

gde je C_p toplotni kapacitet sistema pri konstantnom pritisku.

Zadatak 5. Koristec1i osobine Jakobijana i odgovarajuc1u Meksvelovu termodinamichku jednachinu, dokazati vazhenje relacije:

$$\frac{\partial(p, V)}{\partial(T, S)} = 1$$

Zadatak 6. Dokazati da unutrashnja energija termomehanichkog sistema chija je termichka jednachina stanja data sa:

$$pV = RT$$

ne zavisi od zapremine sistema.

Zadatak 7. Eksperimentalno je odredjeno da je pritisak fotonskog gasa dat relacijom:

$$p = AT^4$$

gde je A neka konstanta. Odrediti unutrashnju energiju $U(T, V)$ gasa.

Zadatak 8. Koristec1i III zakon termodinamike dokazati da $\alpha_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \to 0$ kada $T \to 0$.

Zadatak 9. Jednachina stanja i toplotni kapacitet nekog gasa su dati sa:

$$p(T, V) = aT^{5/2} + bT^3 + cV^{-2}$$

i

$$C_V = gT^{3/2}V + eT^2V + fT^{1/2}$$

gde su a, b, c, g, e, f konstante koje ne zavise od zapremine i temperature. Odrediti infinitezimalno malu promenu unutrashnje energije $U = U(T, V)$. Koristec1i chinjenicu da je unutrashnja energija funkcija stanja sistema, odrediti veze izmedju navedenog skupa konstanti.

Zadatak 10. Odrediti brzinu promene temperature gasa sa pritiskom pri konstantnoj entalpiji $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_E$ u zavisnosti od funkcija odziva α_p i C_p.

Zadatak 11. Dokazati da za termodinamichki sistem vazhi:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

gde je E entalpija, V zapremina, T temperatura i p pritisak sistema.

Zadatak 12. Dokazati da za termodinamichki sistem vazhi da je:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = 0$$

ako je:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$$

gde je U unutrashnja energija, V zapremina, T temperatura i p pritisak sistema.

Zadatak 13*. Razmatramo sistem od N chestica, U, T, V i μ predstavljaju unutrashnju energiju, temperaturu, zapreminu i hemijski potencijal sistema respektivno. Dokazati vazhenje relacije:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,\frac{\mu}{T}} - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}^2}{T}$$

Zadatak 14. Razmatramo neki termodinamichki sistem, za koji U, E, T, V, p, S predstavljaju unutrashnju energiju, entalpiju, temperaturu, zapreminu, pritisak i entropiju sistema respektivno. Dokazati vazhenje relacije:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T - V = -C_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$$

gde C_p predstavlja toplotni kapacitet pri konstantnom pritisku.

Zadatak 15. Za neki termodinamichki sistem poznat je izraz za Gibsov termodinamichki potencijal:

$$G(p,T) = RT\ln\left(\frac{ap}{RT^{\frac{5}{2}}}\right)$$

gde su a i R konstante. Odrediti toplotni kapacitet pri konstantnom pritisku C_p.

Zadatak 16. Za neki termodinamichki sistem poznat je izraz za slobodnu energiju:

$$F(T,V) = RT\ln\left(\frac{aV}{RT^{\frac{5}{2}}}\right)$$

gde su a i R konstante. Odrediti toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini C_V.

Zadatak 17*. Posmatramo termodinamichki sistem chije su unutrashnja energija U i entalpija E odredjene njegovim pritiskom p i zapreminom V. Dokazati da vazhe sledec1e relacije:

$$dU = C_V \frac{\kappa_T}{\alpha_p} dp + \left(\frac{C_p}{\alpha_p} - pV \right) \frac{dV}{V}$$
$$dE = \left(C_V \frac{\kappa_T}{\alpha_p} + V \right) dp + \frac{Cp}{\alpha_p} \frac{dV}{V}$$

gde su C_p i C_V toplotni kapaciteti pri konstantnom pritisku i zapremini respektivno, κ_T predstavlja izotermsku kompresibilnost definisanu sa:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

dok je α_p termichki koeficijent shirenja dat definicijom:

$$\alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Zadatak 18*. Dokazati da za termodinamichki sistem vazhe sledec1e relacije za toplotni kapacitet pri konstantnom pritisku C_p i konstantnoj zapremini C_V:

$$C_p = \frac{TV\alpha_p^2}{\kappa_T - \kappa_S}$$
$$C_V = \frac{\kappa_S}{\kappa_T} \frac{TV\alpha_p^2}{\kappa_T - \kappa_S}$$

gde je α_p termichki koeficijent shirenja dat definicijom:

$$\alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

a κ_T i κ_S su izotermska i adijabatska kompresibilnost definisane sa:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$
$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$$

Zadatak 19. Dokazati da za toplotni kapacitet magnetnog sistema pri konstantnoj magnetizaciji vazhi:

$$C_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_M$$

gde je U unutrashnja energija sistema.

Zadatak 20. Poznato je da za jednostavan paramagnetni sistem ukoliko je temperatura konstantna, a magnetno polje se promeni sa vrednosti H na vrednost $H + \Delta H$, tada se entropija S promeni za iznos:

$$\Delta S = -\frac{CH\Delta H}{T^2}$$

gde je C konstanta. Na osnovu toga odrediti zavisnost magnetizacije sistema od temperature.

Literatura

[1] *Božidar Milić, Sava Milošević, Ljiljana Dobrosavljević, Zbirka zadataka iz teorijske fizike III deo - Statistička fizika, Naučna knjiga, Beograd (1979).*

[2] *Ryogo Kubo, Thermodynamics: An Advanced Course with Problems and Solutions, North-Holland Publishing Company (1968).*

[3] *Michele Cini, Francesco Fucito, Mauro Sbragaglia, Solved Problems in Quantum and Statistical Mechanics, Springer (2012).*

[4] *Vladimir Miljković, Zbirka zadataka iz Statističke fizike, Beorad (2011).*

Elementi teorije verovatnoće

PART II

3 Osnove teorije verovatnoće

Zadatak 1. Dokazati važenje sledeće relacije:

$$\ln N! \equiv N \ln N - N$$

koja je poznata kao Stirlingova relacija (aproksimacija), validna za $N >> 1$.

Rešenje:

Znamo da važi:

$$N! = N(N-1)(N-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \tag{3.1}$$

pa je takođe:

$$\begin{aligned}
\ln N! &= \ln\left[N(N-1)(N-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1\right] \\
&= \ln N + \ln(N-1) + \ln(N-2) + \ldots + \ln 2 + \ln 1 \\
&= \sum_{m=1}^{N} \ln m \equiv \underbrace{\int_1^N \ln(x)dx}_{u=\ln x, dv=dx} \\
&= x\ln(x)|_1^N - \int_1^N x\frac{dx}{x} \\
&= N\ln N - N - 1
\end{aligned} \tag{3.2}$$

①

Za velike vrednosti $N >> 1$ dobijamo Stirlinovu aproksimaciju:

$$\ln N! \equiv N \ln N - N \quad \square \tag{3.3}$$

Zadatak 2. Data je gustina verovatnoće slučajne promenljive x:

$$f(x) = Ae^{-\alpha x} \qquad (0 \le x \le +\infty)$$

Normirati funkcju $f(x)$, a zatim odrediti srednju vrednost slučajne promenljive $\langle x \rangle$, srednju vrednost kvadrata $\langle x^2 \rangle$ kao i njenu disperziju.

Rešenje:

Normiramo funkciju $f(x)$ preko:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)dx &= 1 \\
\int_0^\infty Ae^{-\alpha x}dx &= 1 \\
A(-\frac{1}{\alpha})e^{-\alpha x}|_0^\infty &= 1 \\
\frac{A}{\alpha} = 1 &\rightarrow A = \alpha
\end{aligned} \tag{3.4}$$

②

Normirana gustina verovatnoće ima sada oblik:

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \tag{3.5}$$

Srednja vrednost $\langle x \rangle$ se određuje dalje kao:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_0^\infty x f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \tag{3.6}$$

2

Analogno:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_0^\infty x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{2}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Na osnovu toga disperzija je jednostavno:

$$D(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \tag{3.8}$$

Zadatak 3. Data je gustina verovatnoće slučajne promenljive x:

$$f(x) = \begin{cases} A, & a \le x \le b \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases}$$

Normirati funkcju $f(x)$, a zatim odrediti srednju vrednost slučajne promenljive $\langle x \rangle$, srednju vrednost kvadrata $\langle x^2 \rangle$ kao i njenu disperziju.

Rešenje:

Prvo normiramo funkciju:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= 1 \\ \int_a^b A dx &= 1 \\ Ax|_a^b &= 1 \\ A(b-a) = 1 \rightarrow A &= \frac{1}{b-a} \end{aligned} \tag{3.9}$$

3

Dalje određujemo srednju vrednost slučajne promenljive:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Zatim određujemo srednju vrednost kvadrata slučajne promenljive:

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle &= \int_a^b x^2 f(x)dx\\ &= \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a}\\ &= \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b\\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right]\\ &= \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}\\ &= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}\end{aligned} \tag{3.11}$$

3

Na kraju za disperziju dobijamo:

$$D(x) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{3.12}$$

Zadatak 4. Data je gustina verovatnoće slučajne promenljive x:

$$f(x) = Ae^{-\alpha x^2} \qquad (-\infty \le x \le +\infty)$$

Normirati funkcju $f(x)$, a zatim odrediti srednju vrednost slučajne promenljive $\langle x\rangle$, srednju vrednost kvadrata $\langle x^2\rangle$ kao i njenu disperziju.

Rešenje:

Normiranjem funkcije dobijamo:

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \to A\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx}_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = 1\\ A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \to A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\end{gathered} \tag{3.13}$$

Srednja vrednost je jednostavno:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha x^2}dx = 0 \tag{3.14}$$

4

Potom za srednju vrednost kvadrata slučajne promenljive imamo:

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\alpha} \tag{3.15}$$

Disperzija je dalje data sa:

$$D(x) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{1}{2\alpha} - 0 = \frac{1}{2\alpha} \tag{3.16}$$

Zadatak 5. Data je gustina verovatnoće slučajne promenljive x:

$$f(x) = Ae^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4} \qquad (0 \leq x \leq +\infty)$$

Normirati funkcju $f(x)$, a zatim odrediti srednju vrednost slučajne promenljive $\langle x\rangle$, srednju vrednost kvadrata $\langle x^2\rangle$ kao i njenu disperziju.

Rešenje:

Za početak normiramo funkciju:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 1 \\ \underbrace{A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4} dx}_{\text{smena:}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 = t} &= 1 \\ A\frac{\alpha}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) &= 1 \\ A &= \frac{4}{\alpha\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Srednja vrednost je jednostavno:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4} dx \tag{3.18}$$

odakle smenom u integralu:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 = t \tag{3.19}$$

5

dobijamo za srednju vrednost:

$$\langle x\rangle = A\frac{\alpha^2}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \tag{3.20}$$

Srednju vrednost kvadrata slučajne promenljive dobijamo da je:

$$\langle x^2\rangle = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4} dx = \alpha^2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \tag{3.21}$$

Na osnovu svega toga disperzija je:

$$D(x) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \alpha^2\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right) \tag{3.22}$$

Zadatak 6. Broj elektrona emitovanih sa katode u jednici vremena predstavlja slučajnu veličinu koja se ponaša po Poasonovom zakonu raspodele, tj. verovatnoća da u jedinici vremena bude emitovano n elektrona je data sa:

$$P_n = \frac{a^n}{n!}e^{-a}$$

Proveriti da li je zadovoljen uslov normiranja $\sum_n^{\infty} P_n = 1$ i odrediti disperziju $D(n)$.

Rešenje:

Polazimo o uslova normiranja, za koji lako dokazujemo da važi:

$$\sum_n^\infty P_n = \sum_n^\infty \frac{a^n}{n!}e^{-a} = e^{-a}\underbrace{\sum_n^\infty \frac{a^n}{n!}}_{e^a} = e^a e^{-a} = 1 \tag{3.23}$$

Da bismo odredili disperziju vrednosti n treba nam srednja vrednost:

$$\langle n\rangle = \sum_n^\infty nP_n = \sum_{n=0}^\infty n\frac{a^n}{n!}e^{-a} = e^{-a}a\sum_{n=1}^\infty \underbrace{\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^a} = e^{-a}e^a a = a \tag{3.24}$$

Dodatno moramo odrediti srednju vrednost n^2, što najlakše možemo uraditi određivanjem sledeće srednje vrednosti[1]:

$$\langle n(n-1)\rangle = \langle n^2 - n\rangle = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle \tag{3.25}$$ 6

odakle dobijamo:

$$\langle n(n-1)\rangle = \sum_n^\infty n(n-1)P_n = \sum_{n=0}^\infty n(n-1)\frac{a^n}{n!}e^{-a} = e^{-a}a^2\sum_{n=2}^\infty \underbrace{\frac{a^{n-2}}{(n-2)!}}_{e^a} = e^{-a}e^a a^2 = a^2 \tag{3.26}$$

Na osnovu toga dobija se:

$$\langle n^2\rangle = \langle n(n-1)\rangle - \langle n\rangle = a^2 + a \tag{3.27}$$

pa za disperziju dobijamo:

$$D(n) = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = a^2 + a - a^2 = a \tag{3.28}$$

[1] *Može se dodatno dokazati da srednja vrednost n^2 po definiciji zaista konvergira:*

$$\sum_{n=0}^\infty n^2\frac{a^n}{n!}e^{-a} = a(a+1)$$

Zadatak 7. Posmatraju se dve vrste čestica. Verovatnoća da neka zapremina sadrži j čestica prve vrste određena je Poasonovom raspodelom sa nekom karakterističnom konstantom a. Verovatnoća da zapremina sadrži k čestica druge vrste određena je takođe Poasonovom raspodelom ali sa drugom karakterističnom konstantom b. Pretpostavljajući da su brojevi čestica različite vrste u istoj zapremini nezavisni odrediti verovatnoću da zapremina V sadrži ukupno n čestica.

Rešenje:

Neka j numeriše broj čestica prve vrste, dok k broji čestice druge vrste. Mora da važi:

$$j + k = n \tag{3.29}$$

Imamo nekoliko realizacija događaja gde imamo ukupno n čestica (videti Tabelu 1). 7
Događaj A da zapremina V sadrži n čestica može se realizovati jednim od događaja A_i koji se međusobno isključuju:

$$A = \sum_{i=0}^n A_i \tag{3.30}$$

Događaj A_i predstavlja događaj u kome zapremina sadrži i čestica prve vrste i $n-i$ čestica druge vrste. Verovatnoća događaja A je:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i) \tag{3.31}$$

odnosno:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P_i^a P_{n-i}^b \tag{3.32}$$

pošto brojevi čestica prve vrste ne zavise od broja čestica druge vrste. Imamo dalje:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} e^{-a} \frac{b^{n-i}}{(n-i)!} e^{-b} \tag{3.33}$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i b^{n-i}}{i!(n-i)!} e^{-(a+b)} \tag{3.34}$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i b^{n-i}}{i!(n-i)!} e^{-(a+b)} \cdot \frac{n!}{n!} \tag{3.35}$$

$$P(A) = \frac{e^{-(a+b)}}{n!} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}}_{(a+b)^n} \tag{3.36}$$ 7

pa je na kraju:

$$P(A) = \frac{(a+b)^n}{n!} e^{-(a+b)} \tag{3.37}$$

Tabela 1.

Događaj	Broj čestica 1. vrste	Broj čestica 2. vrste
A_0	0	n
A_1	1	$n-1$
A_2	2	$n-2$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
A_i	i	$n-i$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
A_n	n	0

Zadatak 8. Data je gustina verovatnoće slučajne promenljive x:

$$f(x) = Ax^n e^{-\alpha x^2} \qquad (0 \leq x \leq +\infty)$$

Normirati funkcju $f(x)$. Da li je moguće odrediti n tako da bude zadovoljena relacija:

$$\langle x \rangle \langle \frac{1}{x} \rangle = \langle x^2 \rangle \langle \frac{1}{x^2} \rangle$$

Rešenje:

Prvo normiramo funkciju $f(x)$:

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1 \tag{3.38}$$

$$A\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}dx = 1 \tag{3.39}$$

Uvodimo smenu[2]:

$$\alpha x^2 = t, dx = \alpha^{-1/2}\frac{1}{2}t^{-1/2}dt \tag{3.40}$$

pa je:

$$A\int_0^\infty \alpha^{-\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}}e^{-t}\alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = 1 \tag{3.41}$$

$$A\alpha^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{n-1}{2}}dt}_{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = 1 \tag{3.42}$$

$$\frac{A}{2}\alpha^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2}) = 1 \tag{3.43}$$

pa je konačno konstanta normiranja:

$$A = \frac{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{3.44}$$

Prva srednja vrednost je:

$$\langle x\rangle = A\int_0^\infty x^{n+1}e^{-\alpha x^2}dx \tag{3.45}$$ 8

$$\langle x\rangle = A\int_0^\infty \alpha^{-\frac{n+1}{2}}t^{\frac{n+1}{2}}e^{-t}\alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \tag{3.46}$$

$$\langle x\rangle = A\frac{1}{2}\alpha^{\frac{-n-1-1}{2}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{n+1-1}{2}}dt \tag{3.47}$$

$$\langle x\rangle = \frac{A}{2}\alpha^{-\frac{n+2}{2}}\Gamma(\frac{n+2}{2}) \tag{3.48}$$

$$\langle x\rangle = \frac{1}{2}2\frac{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Gamma(\frac{n+2}{2})\alpha^{-\frac{n+2}{2}} = \alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{3.49}$$

Sledeća srednja vrednost je:

$$\langle\frac{1}{x}\rangle = A\int_0^\infty x^{n-1}e^{-\alpha x^2}dx \tag{3.50}$$

$$\langle\frac{1}{x}\rangle = A\int_0^\infty \alpha^{-\frac{n-1}{2}}t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}\alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \tag{3.51}$$

$$\langle\frac{1}{x}\rangle = \frac{A}{2}\alpha^{\frac{-n+1-1}{2}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{n-2}{2}}dt \tag{3.52}$$

$$\langle\frac{1}{x}\rangle = \frac{1}{2}A\alpha^{-\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}) \tag{3.53}$$

$$\langle\frac{1}{x}\rangle = 2\frac{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2}) = \alpha^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{3.54}$$

[2] *Ovu smenu ćemo koristiti za rešavanje svih integrala u okviru ovog zadatka.*

Sledeća srednja vrednost:

$$\langle x^2\rangle = A\int_0^{\infty} x^{n+2}e^{-\alpha x^2}$$

$$\langle x^2\rangle = A\int_0^{\infty} \alpha^{-\frac{n+2}{2}}t^{\frac{n+2}{2}}e^{-t}\alpha^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{A}{2}\alpha^{-\frac{n+3}{2}}\int^{-t} t^{\frac{n+1}{2}}dt$$

$$\langle x^2\rangle = A\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{n+3}{2}}\Gamma(\frac{n+3}{2})$$

$$\langle x^2\rangle = 2\frac{1}{2}\frac{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Gamma(\frac{n+3}{2})\alpha^{-\frac{n+3}{2}} = \alpha^{-1}\frac{\Gamma(\frac{n+3}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n+3}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

Poslednja srednja vrednost je:

$$\langle\frac{1}{x^2}\rangle = A\int_0^{\infty} x^{n-2}e^{-\alpha x^2}dx$$

$$\langle\frac{1}{x^2}\rangle = A\int_0^{\infty} \alpha^{-\frac{n-2}{2}}t^{\frac{n-2}{2}}e^{-t}\alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$\langle\frac{1}{x^2}\rangle = A\frac{1}{2}\alpha^{\frac{-n+2-1}{2}}int_0^{\infty}e^{-t}t^{\frac{n-3}{2}}dt$$

$$\langle\frac{1}{x^2}\rangle = A\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})$$

$$\langle\frac{1}{x^2}\rangle = 2\frac{1}{2}\frac{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\alpha^{-\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2}) = \alpha\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

Za navedenu relaciju imamo:

$$\langle x\rangle\langle\frac{1}{x}\rangle = \langle x^2\rangle\langle\frac{1}{x^2}\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n+3}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\alpha\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n+1+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\alpha\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-1+1}{2})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\alpha\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{n+1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\alpha\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\frac{n-1}{2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$\frac{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{n+1}{n-1}$$

Prethodna relacija nema rešenja u obliku celog broja za n, ali se numerički može potražiti rešenje u skupu realnih brojeva.

8

Zadatak 9. Data je gustina verovatnoće dve slučajne promenljive x_1 i x_2:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} Ax_1x_2, & 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b \\ 0, & x_1 < 0, x_1 > a, x_2 < 0, x_2 > b. \end{cases}$$

Normirati funkciju $f(x_1, x_2)$ i odrediti srednje vrednosti $\langle x_1 \rangle$, $\langle x_2 \rangle$, $\langle x_1^2 \rangle$, $\langle x_2^2 \rangle$ i $\langle x_1 x_2 \rangle$.

Rešenje:

Kada imamo gustinu verovatnoće za dve slučajne promenljive tada je uslov normiranja:

$$\int \int f(x_1x_2)dx_1dx_2 = 1$$

Na osnovu toga za navedenu gustinu verovatnoće u ovom zadatku imamo:

$$\int_0^a \int_0^b Ax_1x_2dx_1dx_2 = 1$$

$$A\frac{1}{2}a^2\frac{1}{2}b^2 = 1$$

odakle je:

$$A = \frac{4}{a^2b^2}$$

Prva srednja vrednost je data sa:

$$\langle x_1 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_1 f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$\langle x_1 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_1 \frac{4x_1x_2}{a^2b^2}dx_1dx_2$$

$$\langle x_1 \rangle = \frac{4}{a^2b^2}\frac{a^3}{3}\frac{b^2}{2} = \frac{2}{3}a$$

9

Druga srednja vrednost je data sa:

$$\langle x_2 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_2 f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$\langle x_2 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_2 \frac{4x_1x_2}{a^2b^2}dx_1dx_2$$

$$\langle x_2 \rangle = \frac{4}{a^2b^2}\frac{a^2}{2}\frac{b^3}{3} = \frac{2}{3}b$$

Za treću srednju vrednost dobijamo:

$$\langle x_1^2 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_1^2 f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$\langle x_1^2 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_1^2 \frac{4x_1x_2}{a^2b^2}dx_1dx_2$$

$$\langle x_1^2 \rangle = \frac{4}{a^2b^2}\frac{b^2}{2}\frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Četvrta srednja vrednost iznosi:

$$\langle x_2^2 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_2^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\langle x_2^2 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_2^2 \frac{4x_1x_2}{a^2b^2} dx_1 dx_2$$

$$\langle x_2^2 \rangle = \frac{4}{a^2b^2} \frac{a^2}{2} \frac{b^4}{4} = \frac{b^2}{2}$$

Peta srednja vrednost je data sa:

$$\langle x_1x_2 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_1x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\langle x_1x_2 \rangle = \int_0^a \int_0^b x_1x_2 \frac{4x_1x_2}{a^2b^2} dx_1 dx_2$$

$$\langle x_1x_2 \rangle = \frac{4}{a^2b^2} \frac{a^3}{3} \frac{b^3}{3} = \frac{4ab}{9}$$

9

Zadatak 10. Data je gustina verovatnoće dve slučajne promenljive x_1 i x_2:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} Ax_1x_2, & 0 \le x_1 \le a, 0 \le x_2 \le b \\ 0, & x_1 < 0, x_1 > a, x_2 < 0, x_2 > b. \end{cases}$$

Odrediti $\langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle$ što predstavlja tzv. korelator veličina x_1 i x_2. Konstanta A se određuje iz uslova normiranja funkcije $f(x_1, x_2)$.

Rešenje:

Navedeni korelator možemo raspisati kao:

$$\langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle = \langle x_1x_2 - x_1\langle x_2 \rangle - x_2\langle x_1 \rangle + \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \rangle$$

odnosno:

$$\langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle = \langle x_1x_2 \rangle - \langle x_1\langle x_2 \rangle \rangle - \langle x_2\langle x_1 \rangle \rangle + \langle \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \rangle$$

Na osnovu prethodnog zadatka znamo:

$$\langle x_1 \rangle = \frac{2}{3}a$$

$$\langle x_2 \rangle = \frac{2}{3}b$$

$$\langle x_1x_2 \rangle = \frac{4ab}{9}$$

Dodatno treba da izračunamo srednje vrednosti $\langle x_1\langle x_2 \rangle \rangle$, $\langle x_2\langle x_1 \rangle \rangle$ i $\langle \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \rangle$.

10

Prvo imamo:

$$\langle x_1 \langle x_2 \rangle \rangle = \int_0^a \int_0^b x_1 \langle x_2 \rangle f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\langle x_1 \langle x_2 \rangle \rangle = \int_0^a \int_0^b x_1 \frac{2}{3} b \frac{4x_1 x_2}{a^2 b^2} dx_1 dx_2$$

$$\langle x_1 \langle x_2 \rangle \rangle = \frac{2}{3} b \frac{4}{a^2 b^2} \frac{a^3}{3} \frac{b^2}{2} = \frac{4ab}{9}$$

Zatim određujemo:

$$\langle x_2 \langle x_1 \rangle \rangle = \int_0^a \int_0^b x_2 \langle x_1 \rangle f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\langle x_2 \langle x_1 \rangle \rangle = \int_0^a \int_0^b x_2 \frac{2}{3} a \frac{4x_1 x_2}{a^2 b^2} dx_1 dx_2$$

10

$$\langle x_2 \langle x_1 \rangle \rangle = \frac{2}{3} a \frac{4}{a^2 b^2} \frac{a^2}{2} \frac{b^3}{3} = \frac{4ab}{9}$$

Još nam treba:

$$\langle \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \rangle = \int_0^a \int_0^b \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\langle \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \rangle = \int_0^a \int_0^b \frac{2}{3} a \frac{2}{3} b \frac{4x_1 x_2}{a^2 b^2} dx_1 dx_2$$

$$\langle \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \rangle = \frac{2}{3} a \frac{2}{3} b \frac{4}{a^2 b^2} \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} = \frac{4ab}{9}$$

Na kraju se za korelator dobija:

$$\langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle = \frac{4ab}{9} - \frac{4ab}{9} - \frac{4ab}{9} + \frac{4ab}{9} = 0$$

4 Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Data je gustina verovatnoće slučajne promenljive x:

$$f(x) = Ae^{-(\frac{x}{\alpha})^2} \qquad (0 \leq x \leq +\infty)$$

gde je α konstanta. Normirati funkciju $f(x)$ i odrediti disperziju slučajne promenljive x.

Zadatak 2. Data je gustina verovatnoće slučajne promenljive x:

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases}$$

Normirati funkcju $f(x)$, a zatim odrediti srednju vrednost slučajne promenljive $\langle x \rangle$, srednju vrednost kvadrata $\langle x^2 \rangle$ kao i njenu disperziju.

Zadatak 3. Data je gustina verovatnoće slučajne promenljive x:

$$f(x) = Ae^{-\alpha x} \qquad (0 \leq x \leq +\infty)$$

Normirati funkcju $f(x)$, a zatim odrediti srednju vrednost $\langle x^3 \rangle$.

Zadatak 4. Za Poasonovu raspodelu verovatnoće diskretne slučajne promenljive M:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

odrediti disperziju. Kolika je verovatnoća da slučajna promenljiva ima vrednosti $M \leq 4$ ukoliko je karakteristična konstanta raspodele $a = 6$?

Zadatak 5. Data je gustina verovatnoće dve slučajne promenljive x_1 i x_2:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} Ax_1x_2, & 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b \\ 0, & x_1 < 0, x_1 > a, x_2 < 0, x_2 > b. \end{cases}$$

Normirati funkciju $f(x_1, x_2)$ i odrediti srednje vrednosti $\langle x_1^3 \rangle$, $\langle x_2^3 \rangle$, $\langle \frac{x_1}{x_2} \rangle$.

Literatura

[1] *Božidar Milić, Sava Milošević, Ljiljana Dobrosavljević, Zbirka zadataka iz teorijske fizike III deo - Statistička fizika, Naučna knjiga, Beograd (1979).*

PART

III

Fazni prostor

5 Fazni prostor

Zadatak 1. Odrediti faznu trajektoriju linearnog harmonijskog oscilatora

Rešenje:

Pođimo od diferencijalne jednačine linearnog harmonijskog oscilatora:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ \ddot{x} + \omega^2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Uvođenjem transformacije:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} \tag{5.2}$$

i dobijamo:

$$\begin{aligned} \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} + \omega^2 x &= 0 \\ \dot{x}d\dot{x} + \omega^2 x dx &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Posle integracije dobijamo:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 = C \tag{5.4}$$

1

gde je C neka konstanta dobijena posle integracije. Množenjem sa m prethodne relacije dobijamo:

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{E_k} + \underbrace{\frac{\omega^2}{2}mx^2}_{E_p} = mC \tag{5.5}$$

odakle prepoznajemo kinetičku E_k i potencijalnu energiju oscilatora E_p, odnosno energiju oscilatora E:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}mx^2 = E \tag{5.6}$$

ili ako uvedemo impuls:

$$\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E \tag{5.7}$$

Deljenjem sa E prethodne relacije imamo:

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1 \tag{5.8}$$

odakle se lako može zaključiti da je fazna trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora, u (p_x, x) prostoru, elipsa.

Zadatak 2. Odrediti faznu trajektoriju matematičkog klatna.

Rešenje:

Kretanje matematičkog klatna se može opisati diferencijalnom jednačinom:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{5.9}$$

Uvođenjem transformacije:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \tag{5.10}$$

i dobijamo:

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi d\varphi = 0 \tag{5.11}$$

Integracijom imamo:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\cos\varphi = C / \cdot ml^2 \\ \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2}_{E_k} \underbrace{-\frac{g}{l}ml^2\cos\varphi}_{E_p} = Cml^2\end{gathered} \tag{5.12}$$

2

gde smo opet prepoznali kinetičku i potencijalnu energiju klatna. Uvođenjem impulsa dobijamo:

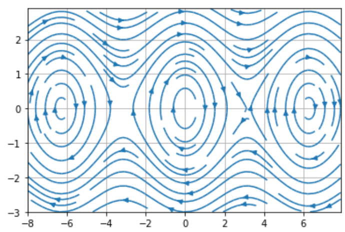
$$\frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = E \tag{5.13}$$

odnosno:

$$p_\varphi^2 = 2m^2gl^3\left(\frac{E}{mgl} + \cos\varphi\right) \tag{5.14}$$

što predstavlja faznu trajektoriju matematičkog klatna[3]

[3] *Izgled faznih trajektorija matematičkog klatna.*



Zadatak 3. Odrediti faznu trajektoriju tela koje se kreće u polju Zemljine teže.

Rešenje:

Razmotrimo telo koje se kreće naviše u polju Zemljine teže, duž neke odabrane z-ose. Pošto je ovo konzervativan sistema čiji je hamiltonijan (energija):

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz \tag{5.15}$$

važi zakon održanja energije:

3

$$\frac{p^2}{2m} + mgz = \frac{p_0^2}{2m} + mgz_0 \tag{5.16}$$

gde smo uzeli da je u nekom početnom trenutku $t = 0$ telo imalo brzinu v_0 (impuls p_0) i nalazilo se u z_0. Na osnovu toga dobili smo faznu trajektoriju ovog tela:

$$p^2 = p_0^2 + 2m^2gz_0 - 2m^2gz \tag{5.17}$$

Zadatak 4. Dokazati invarijantnost fazne zapremine jednodimenzionalnog fizičkog sistema slobodne čestice.

Rešenje:

Hamiltonijan slobodne čestice je:

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{5.18}$$

Na osnovu toga znamo:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Integracijom prethodne relacije dobijamo:

$$\begin{aligned} p &= const \\ q &= \frac{p}{m}t + const \end{aligned} \tag{5.20}$$

4

U nekom trenutku t' važiće:

$$\begin{aligned} p' &= p \\ q' &= \frac{p}{m}t' + const \end{aligned} \tag{5.21}$$

Odnosno dodatno možemo pisati:

$$\begin{aligned} p' &= p \\ q' &= q + \frac{p}{m}(t' - t) \end{aligned} \tag{5.22}$$

Jakobijan transformacije nam daje informaciju o ponašanju fazne zapremine. Jakobijan za ovaj sistem je:

$$J(t', t) = \frac{\partial(p', q')}{\partial(p, q)} = 1 \tag{5.23}$$

što je dokaz invarijantnosti fazne zapremine ovog sistema.

Zadatak 5. Dokazati invarijantnost fazne zapremine linearnog harmonijskog oscilatora.

Rešenje:

Hamiltonijan linearnog harmonijskog oscilatora je:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{5.24}$$

Na osnovu toga znamo:

5

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Dobija se na osnovu $\dot{q}$ diferencijalna jednačina:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

čije je rešenje:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t)$$

gde su:

$$p_0 = p(t = 0)$$

$$q_0 = q(t = 0)$$

Slično imamo i za:

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t)$$

5

U nekom trenutku t' važiće:

$$\begin{aligned} p' &= p\cos(\omega t') - m\omega q \sin(\omega t') \\ q' &= q\cos(\omega t') - \frac{p}{m\omega} \sin(\omega t') \end{aligned} \tag{5.26}$$

Jakobijan transformacije nam daje informaciju o ponašanju fazne zapremine. Jakobijan za ovaj sistem je:

$$J(t', t) = \frac{\partial(p', q')}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p'}{\partial p} & \frac{\partial p'}{\partial q} \\ \frac{\partial q'}{\partial p} & \frac{\partial q'}{\partial q} \end{vmatrix} = 1 \tag{5.27}$$

što je dokaz invarijantnosti fazne zapremine ovog sistema.

Zadatak 6. Izračunati zapreminu i površinu n-dimenzionalne hipersfere u Euklidskom prostoru.

Rešenje:

Razmotrimo sledeće, u tri dimenzije zapremina sfere je:

$$V_3 = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

U dve dimenzije govorimo o površinama, ili o hiperzapremini u dve dimenzije. Zapermina hipersfere u dve dimenzije (površina kruga) je:

$$V_2 = R^2 \pi$$

6

Vidimo da postoji trend u definicijama V_2 i V_3. Možemo pretpostaviti da će zapremina hipersfere u n-dimenzionom prostoru biti data sa:

$$V_n = C_n R^n$$

gde je R svakako poluprevćnik hipersfere, dok je C_n neka kostanta. Dalje imamo:

$$dV_N = C_n n R^{n-1} dR$$

a znamo da je i u opštem obliku:

$$dV_n = dx_1 dx_2 dx_3 ... dx_n$$

Zapremina hipersfere je data sa:

$$V_n = \underbrace{\int ... \int}_{n\ integrala} dx_1 dx_2 dx_3 ... dx_n$$

dok je jednačina hipersfere poluprečnika R:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = R^2$$

Polazimo od Poasonovog integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Imamo:

$$\underbrace{I \cdot I \cdot I ... \cdot I}_{n-puta} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-puta} e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - ... - x_n^2} dx_1 dx_2 dx_3 ... dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} dx_i}_{dV_n}$$

Prepoznavanjem jednačine hipersfere[4] imamo:

[4] *Drugim rečima prelaskom na hiperferni koordinatni sistem.*

6

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-R^2} n C_n R^{n-1} dR$$

$$\pi^{\frac{n}{2}} = n C_n \int_0^{\infty} e^{-R^2} R^{n-1} dR$$

Uvodimo smenu:

$$R^2 = t, \quad R = \sqrt{t}, \quad dR = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

pa imamo:

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \frac{n C_n}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n-2}{2}} dt}_{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \frac{n C_n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})$$

Imamo da je konstanta:

$$C_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Na osnovu toga zapremina n-dimenzione hipersfere je data sa:

$$V_n \equiv V_n(R) = C_n R^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n$$

Površina hipersfere bi odgovarala delu:

$$S_n = n C_n R^{n-1}$$

jer je:

$$dV_n = S_n dR$$

Dodatno znamo i:

$$S_n(R) = n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^{n-1}$$

$$S_n(R) = n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}R^{n-1}$$

$$S_n(R) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}R^{n-1}$$

6

Zadatak 7. Izračunati veličinu fazne zapremine $\Gamma(E^*, V)$ omeđenu sa hiperpovrši konstantne energije E^* za sistem od N molekula idealnog gasa u zapremini V.

Rešenje:

Fazna zapremina za sistem od N molekula idealnog gasa u zapremini V je data sa:

$$\begin{aligned}\Gamma(E^*, V) = &\underbrace{\int\ldots\int}_{3N\ integrala} dx_1 dy_1 dz_1 \ldots dx_N dy_N dz_N \cdot \\ &\cdot \underbrace{\int\ldots\int}_{3N\ integrala} dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} \ldots dp_{xN} dp_{yN} dp_{zN}\end{aligned} \tag{5.28}$$

Računamo veliču fazne zapremine koja je ograničena sa hiperpovrši konstantne energije E^* odnosno imamo na osnovu hamiltonijana:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2\right) \le E^*$$

Prethodna jednačina daje ogračenje na impulse, a stim i na oblast integracije u impulsnom prostoru. Imamo dalje:

7

$$\begin{aligned}\Gamma(E^*, V) = &\underbrace{\underbrace{\int\ldots\int}_{3N\ \ integrala} dx_1 dy_1 dz_1 \ldots dx_N dy_N dz_N \cdot}_{V^N} \\ &\cdot \underbrace{\int\ldots\int}_{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m}\left(p_{xi}^2+p_{yi}^2+p_{zi}^2\right)\le E^*} dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} \ldots dp_{xN} dp_{yN} dp_{zN}\end{aligned} \tag{5.29}$$

Na osnovu ograničenja

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2\right) \le E^*$$

integracija po impulsnom prostoru predstavja zapreminu $3N$-dimenzione hipersfere poluprečnika:

$$R = \sqrt{2mE^*}$$

Na osnovu rezultata prethodnog zadatka imamo da je zapremina tražene fazne zapremine:

$$\Gamma(E^*,V) = V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} R^{3N} = V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} (2mE^*)^{\frac{3N}{2}}$$ 7

Zadatak 8. Izračunati veličinu fazne zapremine $\Gamma(E^*)$ omeđenu sa hiperpovrši konstantne energije E^* za sistem od N neinteragujućih harmonijskih oscilatora iste frekvencije ω.

Rešenje:

Fazna zapremina ovog sistema je data sa:

$$\Gamma(E^*) = \underbrace{\int \dots \int}_{2N\ \ integrala} dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N$$

Integraciju vršimo u oblasti ograničenoj energijskom hiperpovrši koju na osnovu hamiltonijana sistema imamo u obliku:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2 \right) = E^*$$

odnosno:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(p_i^2 + m^2\omega^2 q_i^2 \right) = 2mE^*$$

Uvodimo smenu:

$$x_i = m\omega q_i, \quad q_i = \frac{1}{m\omega} x_i, \quad dq_i = \frac{1}{m\omega} dx_i$$

Na osnovu toga dobija se:

$$\Gamma(E^*) = \frac{1}{m^N \omega^N} \underbrace{\int \dots \int}_{\sum_{i=1}^{N}(p_i^2 + x_i^2) = 2mE^*} dx_1 \dots dx_N dp_1 \dots dp_N$$ 8

Očigledno je da tražena veličina faznog prostora predstavlja zapreminu $2N$-dimenzione hipersfere poluprečnika $R = \sqrt{2mE^*}$ odnosno imamo:

$$\Gamma(E^*) = \frac{1}{m^N \omega^N} \frac{\pi^{\frac{2N}{2}}}{\Gamma(\frac{2N}{2}+1)} R^{2N}$$

$$\Gamma(E^*) = \frac{1}{m^N \omega^N} \frac{\pi^N}{\underbrace{\Gamma(N+1)}_{\frac{\pi^N}{N!}}} (2mE^*)^{\frac{2N}{2}}$$

$$\Gamma(E^*) = \frac{1}{N!} \frac{1}{m^N \omega^N} (2\pi m E^*)^N$$

$$\Gamma(E^*) = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi E^*}{\omega} \right)^N$$

Zadatak 9. Ako je poznato da se element fazne zapremine može izraziti sa:

$$d\Gamma = \frac{d\Sigma dE}{|gradH|}$$

izračunati verovatnoću nalaženja klasičnog linearnog harmonijskog oscilatora amplitude A u nekoj tački između x i $x + dx$.

Rešenje:

Poznato je da se fazna zapremina određuje sa:

$$\Gamma(E) = \int_{H\leq E} d\Gamma = \int_{H\leq E} \frac{d\Sigma dE}{|gradH|}$$

a dodatno važi:

$$\Gamma(E) = \int_{E_{min}}^{E} \int_{H=E} \frac{d\Sigma}{|gradH|} dE$$

Za površinu faznog prostora imamo:

$$\Omega(E) = \frac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}$$

$$\Omega(E) = \int_{H=E} \frac{d\Sigma}{|gradH|}$$

odakle je:

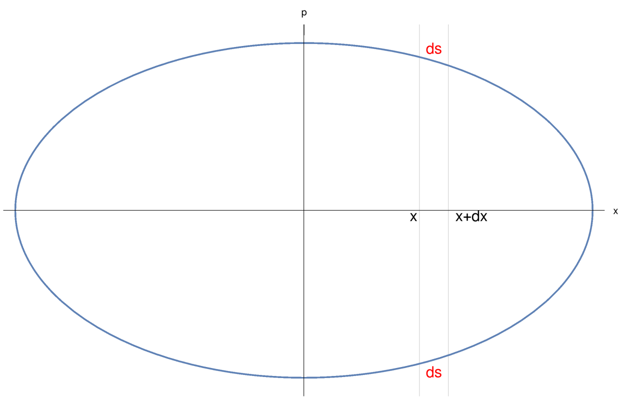
$$d\Omega(E) = \frac{d\Sigma}{|gradH|}$$

Verovatnoća nalaženja fazne tačke na nekom delu hiperpovrši će biti data sa:

$$dw = \frac{d\Omega(E)}{\Omega(E)} = \frac{\frac{d\Sigma}{|gradH|}}{\int_{H=E} \frac{d\Sigma}{|gradH|}} \qquad (9)$$

Fazna trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora je data sa:

$$\frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p^2}{2mE} = 1$$



Slika 2. Fazna trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora

Na Slici 2 prikazana je fazna trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora. Verovatnoće da se fazna tačka nađe između x i $x + dx$ jednaka je verovatnoći da se nađe na delu ds, sa dve ekvivalentne pozicije kao što se vidi sa Slike 2. Na osnovu toga[5]:

$$dw = 2\frac{\frac{ds}{|gradH|}}{\int_L \frac{ds}{|gradH|}}$$

Dalje imamo:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dp^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dp}{dx}\right)^2} dx$$

Znamo da je:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E$$

odnosno:

$$p = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}$$

pa je:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{m^2\omega^2 x}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}} = -\frac{m^2\omega^2 x}{p}$$

Samim tim je:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{m^2\omega^2 x}{p}\right)^2} dx$$

Dodatno nam treba i:

$$|gradH| = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^2} = \frac{p}{m}\sqrt{1 + \left(\frac{m^2\omega^2 x}{p}\right)^2}$$

Dalje dobijamo:

$$dw = 2\frac{\frac{dx}{\frac{p}{m}}}{\int_L \frac{dx}{\frac{p}{m}}} = 2\frac{\frac{dx}{v}}{\int_L \frac{dx}{v}}$$

Izraz:

$$\int_L \frac{dx}{v} = T = \frac{2\pi}{\omega}$$

predstavlja period oscilatora. Na kraju iz zakona održanja energije dobijamo:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$\dot{x} \equiv v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

pa se za traženu verovatnoću dobija:

$$dw = 2\frac{\frac{dx}{\omega\sqrt{A^2-x^2}}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

9

[5] *Oznaka L je uvedena za oznaku elipse po kojoj se vrši integracija.*

Zadatak 10. Fizički sistem se sastoji od N međusobno neinteragujućih čestica i ima ukupnu energiju $E = M\epsilon_0$ gde je ϵ_0 neka karakteristična energija sistema a M je ceo broj. Naći statističku verovatnoću, tj. broj načina na koji se posmatranih N čestica mogu rasporediti, što predstavlja najverovatniju distribuciju čestica. Svaka od čestica mozhe se nalaziti samo u stanjima sa energijom $-\epsilon_0$ i $+\epsilon_0$.

Rešenje:

Ukupan broj čestica je:

$$N = N_+ + N_-$$

gde je N_+ broj čestica sa energijom $+\epsilon_0$ dok je N_- broj čestica sa energijom $-\epsilon_0$. Dodatno važi da je:

$$N_+ = N - N_-$$

kao i:

$$N_- = N - N_+$$

Imamo da važi:

$$E = M\epsilon_0 = N_+\epsilon_0 - N_-\epsilon_0$$

Ukoliko zamenimo umesto N_+ relaciju $N_+ = N - N_-$ dobijamo:

$$M\epsilon_0 = N\epsilon_0 - N_-\epsilon_0 - N_-\epsilon_0$$

10

odnosno:

$$M = N - 2N_-$$

odakle je:

$$N_- = \frac{1}{2}(N - M)$$

Slično se može dokazati da je:

$$N_+ = \frac{1}{2}(N + M)$$

Tražena verovatnoća jednaka je broju načina da se od N čestica odabere N_+ (ili N_-) čestica:

$$P = \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{N_+!(N - N_+)!} = \frac{N!}{N_+!N_-!} = \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}(N + M)\right)!\left(\frac{1}{2}(N - M)\right)!}$$

6 Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Kako se sa vremenom menja fazna zapremina koju zauzima odredjeni skup tachaka koje reprezentuju linearne harmonijske oscilatore sa malim trenjem proporcionalnim brzini kretanja. Diferencijalna jednachina kretanja linearnog harmonijskog oscilatora sa malim trenjem proporcionalnim brzini kretanja glasi:

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0$$

gde je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Zadatak 2. Izrachunati velichinu fazne zapremine $\Gamma(E^*)$ omedjenu sa hiperpovrshi konstantne energije E^* za sistem od N neinteragujuc1ih harmonijskih oscilatora iste frekvencije ν.

Zadatak 3. Odrediti velichinu faznog prostora omedjenu hiperpovrshi konstantne energije za sistem od N molekula idealnog gasa u d-dimenzionoj "kutiji" zapremine V.

Zadatak 4. Data je velichina fazne zapremine omedjene sa hiperpovrshi konstantne energije E za sistem od N molekula idealnog gasa u zapremini V:

$$\Gamma(E,V) = V^N \frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}(2mE)^{3N/2}$$

Odrediti povrshinu $\Omega(E)$ ove fazne zapremine.

Zadatak 5. Fazna zapremina trodimenzionalnog ultrarelativistichkog gasa koji se sastoji od N chestica je data sa:

$$\Gamma^*(E) = \frac{1}{(3N)!}\left(\frac{8\pi V E^3}{c^3}\right)^N$$

Odrediti povrshinu $\Omega(E)$ ove fazne zapremine.

Literatura

[1] *Božidar Milić, Sava Milošević, Ljiljana Dobrosavljević, Zbirka zadataka iz teorijske fizike III deo - Statistička fizika, Naučna knjiga, Beograd (1979).*

PART

IV

Statistički ansambli

7 Mikrokanonski ansambl

Zadatak 1. Sistem se sastoji od N molekula idealnog gasa u zapremini V. Odrediti entropiju S kao i energiju E sistema u funkciji temperature.

Rešenje:

Već nam je poznata fazna zapremina ovog sistema i data je sa:

$$\Gamma^*(E,V) = V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}(2mE)^{\frac{3N}{2}} \tag{7.1}$$

Broj mogućih mikrostanja unutar fazne zapremine ovog sistema iznosi:

$$\Gamma(E,V) = \frac{1}{N!h^{3N}}\Gamma^*(E,V) \tag{7.2}$$

odnosno:

$$\Gamma(E,V) = \frac{1}{N!h^{3N}} V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}(2mE)^{\frac{3N}{2}} \tag{7.3}$$

Entropija sistema je data definicijom:

$$S = k_B \ln \Gamma(E,V) \tag{7.4}$$

1

i na osnovu toga je:

$$S = k_B \ln\left(\frac{1}{N!h^{3N}} V^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}(2mE)^{\frac{3N}{2}}\right) \tag{7.5}$$

Energiju sistema dobijamo korišćenjem definicije:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} \tag{7.6}$$

odakle određivanjem traženog izvoda dobijamo:

$$\frac{1}{T} = k_B \frac{3N}{2}\frac{1}{E} \tag{7.7}$$

pa je energija sistema:

$$E = \frac{3N}{2}k_B T \tag{7.8}$$

Zadatak 2. Sistem se sastoji od N nezavisnih oscilatora, frekvencije oscilovanja ν. Tretirajući ovaj sistem klasično, naći entropiju sistema S, kao i energiju sistema E kao funkcije temperature T.

Rešenje:

Poznata nam je veličina fazne zapremine ovog sistema:

$$\Gamma^*(E) = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi E}{\omega}\right)^N$$

odnosno za:

$$\omega = 2\pi\nu$$

imamo:

$$\Gamma^*(E) = \frac{1}{N!}\left(\frac{E}{\nu}\right)^N$$

Broj mogućih mikrostanja ovog sistema je dat sa:

$$\Gamma(E) = \frac{N!h^N}{\Gamma^*(E)} = \frac{1}{(N!)^2}\left(\frac{E}{h\nu}\right)^N$$

Za entropiju se dobija:

$$S = k_B \ln \Gamma(E)$$

$$S = k_B \ln \frac{1}{(N!)^2}\left(\frac{E}{h\nu}\right)^N \quad (2)$$

$$S = k_B \ln\left(\frac{E}{h\nu}\right)^N - k_B \ln(N!)^2$$

$$S = k_B N \ln\left(\frac{E}{h\nu}\right) - 2k_B \ln N!$$

$$S = k_B N \ln\left(\frac{E}{h\nu}\right) - k_B N \ln N + 2k_B N$$

Dalje određujemo:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V}$$

$$\frac{1}{T} = k_B N \frac{h\nu}{E} \cdot \frac{1}{h\nu}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B N}{E}$$

odakle je energija sistema:

$$E = N k_B T$$

Zadatak 3. Fazna zapremina trodimenzionalnog ultrarelativističkog gasa koji se sastoji od N čestica je data sa:

$$\Gamma^*(E) = \frac{1}{(3N)!}\left(\frac{8\pi V E^3}{c^3}\right)^N$$

Odrediti entropiju, kaloričku i termičku jednačinu stanja ovog sistema.

Rešenje:

Da bismo odredili entropiju u formalizmu mikrokanonskog ansambla treba nam broj mogućih mikrostanja unutar fazne zapremine, sistema koji dobijamo kao:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{N!h^{3N}}\Gamma^*(E) = \frac{1}{N!h^{3N}}\frac{1}{(3N)!}\left(\frac{8\pi VE^3}{c^3}\right)^N \tag{7.9}$$

Na osnou toga entropija sistema je data definicijom:

$$S = k_B \ln \Gamma(E) \tag{7.10}$$

odnosno:

$$S = k_B \ln\left(\frac{1}{N!h^{3N}}\frac{1}{(3N)!}\left(\frac{8\pi VE^3}{c^3}\right)^N\right) \tag{7.11}$$

Kaloriču jednačinu stanja, odnosno energiju sistema dobijamo iz definicije:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} \tag{7.12}$$

3

Određivanjem izvoda entropije po energiji E dobijamo:

$$\frac{1}{T} = 3Nk_B\frac{1}{E} \tag{7.13}$$

odakle je energija sistema:

$$E = 3Nk_BT \tag{7.14}$$

Termičku jednačinu stanja dobijamo polazeći od definicije:

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} \tag{7.15}$$

odakle imamo:

$$\frac{p}{T} = k_BN\frac{1}{V} \tag{7.16}$$

ili:

$$pV = Nk_BT \tag{7.17}$$

Zadatak 4. Čestica se nalazi u zapremini V, izvan polja sila. Naći gustinu stanja na energijskog hiperpovrši $H(p_i, q_i) = E$. Primeniti dobijeni rezultat na sistem od N slobodnih elektrona koji se nalazi na temperaturi $T = 0K$, znajući da su u tom slučaju popunjeni svi nivoi energije od nultog do nekog, maksimalnog energijskog nivoa E_F (Fermijeva energija) koji je definisan sa:

$$\int_0^{E_F} \Omega(E)dE = N$$

Vodeći računa o degeneraciji nivoa zbog spina elektrona, naći jednoelektronsku gustinu stanja $\Omega(E)$ u funkciji E_F i N, smatrajući da elektroni obrazuju idealni gas.

Rešenje:

Za jednu česticu ($N = 1$) veličina fazne zapremine je data sa:

$$\Gamma^*(E) = \underbrace{\int \dots \int}_{6\ integrala} dxdydzdp_xdp_ydp_z$$

Hamiltonijan čestice je dat sa:

$$H = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$$

odakle je:

$$\Gamma^*(E) = \int\int\int dxdydz \underbrace{\int\int\int}_{H \le E} dp_xdp_ydp_z = \Gamma^*(E) = V \underbrace{\int\int\int}_{p_x^2+p_y^2+p_z^2 \le 2mE} dp_xdp_ydp_z$$

Integracija po impulsnom prostoru je jednaka zapremini sfere poluprečnika $R = \sqrt{2mE}$, odnosno:

$$\Gamma^*(E) = V\frac{4}{3}\pi(2mE)^{\frac{3}{2}}$$

Broj mikrostanja je dat sa:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{h^3}\Gamma^*(E) = \frac{V}{h^3}\frac{4}{3}\pi(2mE)^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

Gustina jednoelektronskih stanja je data sa:

$$\Omega(E) = \frac{\partial\Gamma(E)}{\partial E} = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}$$

Ako su čestice elektroni imamo degeneraciju $g = 2$ (zbog spina) pa je:

$$\Omega(E) = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}$$

Koristimo uslov:

$$\int_0^{E_F} \Omega(E)dE = N$$

$$\int_0^{E_F} \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}dE = N$$

$$\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}E_F^{\frac{3}{2}} = N$$

odakle za traženu gustinu jednoelektronskih stanja možemo pisati:

$$\Omega(E_{el}) = \frac{3}{2}N\frac{E^{\frac{1}{2}}}{E_F^{\frac{3}{2}}}$$

Zadatak 5. Fizički sistem se sastoji od N nezavisnih različitih čestica. Svaka od njih ima dva energijska nivoa E_1 i E_2 takva da $E_2 - E_1 = \epsilon > 0$. Odabrati pogodno osnovno stanje i odrediti energiju sistema kao funkciju temperature.

Rešenje:

Ukoliko kao osnovno stanje odaberemo $E_1 = 0$ imamo da je:

$$E_2 = \epsilon \tag{7.18}$$

Energiju sistema dobijamo iz:

$$E = \sum_{j=1}^{N} n_j \epsilon = m\epsilon \tag{7.19}$$

gde n_j može imati vrednosti 0 i 1, odnosno m predstavlja broj čestica koje imaju energiju $E_2 = \epsilon$. Broj mogućih mikrostanja predstavlja broj načina na koji možemo od N čestica odabrati m čestica sa energijom ϵ, odnosno:

$$\Omega = \frac{N!}{m!(N-m)!} \tag{7.20}$$

Entropija sistema je:

$$S = k_B \ln \Omega = k_B \ln \left(\frac{N!}{m!(N-m)!} \right) \tag{7.21}$$

Ukoliko uzmemo da je $N, m >> 1$, korišćenjem Stirlingove aproksimacije, dobijamo:

$$S = k_B \left[N \ln N - N - m \ln m + m - (N-m) \ln(N-m) + N - m \right] \tag{7.22}$$

odnosno:

$$S = k_B \left[N \ln N - (N-m) \ln(N-m) - m \ln m \right] \tag{7.23}$$ 5

Energiju sistema možemo dobiti određivanjem:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_N \tag{7.24}$$

koju možemo malo izmeniti:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_N = \left(\frac{\partial S}{\partial m} \right)_N \left(\frac{\partial m}{\partial E} \right)_N = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial S}{\partial m} \right)_N \tag{7.25}$$

Jednostavnim diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{\epsilon} \left[\frac{N}{N-m} + \ln(N-m) - \frac{m}{N-m} - \ln m - 1 \right] = \frac{k_B}{\epsilon} \ln \left(\frac{N-m}{m} \right) \tag{7.26}$$

pa na osnovu toga imamo:

$$\epsilon = k_B T \ln \left(\frac{N-m}{m} \right) \tag{7.27}$$

pa je energija sistema:

$$E = m\epsilon = m k_B T \ln \left(\frac{N-m}{m} \right) = \frac{E}{\epsilon} k_B T \ln \left(\frac{N - \frac{E}{\epsilon}}{\frac{E}{\epsilon}} \right) \tag{7.28}$$

Iz prethodne relacije se u potpunosti lako može odrediti zavisnost energije od temperature, i dobija se:

$$E = \frac{N\epsilon}{1 + e^{\frac{\epsilon}{k_B T}}} \tag{7.29}$$

Zadatak 6. Fizički sistem se sastoji od N različitih spinova sa mogućim vrednostima ± 1. Ove vrednosti odgovaraju energijskim stanjima $\pm\epsilon$. Odrediti ukupnu energiju sistema. Raditi u formalizmu mikrokanonskog ansambla.

Rešenje:

Neka N_+ predstavlja broj spinova u stanju sa energijom $+\epsilon$, dok je N_- broj spinova u stanjima sa energijom $-\epsilon$. Ukupan broj spinova je $N = N_+ + N_-$. Energija sistema je data sa:

$$E = (N_+ - N_-)\epsilon \tag{7.30}$$

Lako se dobija da važi:

$$N_+ = \frac{1}{2}\left(N + \frac{E}{\epsilon}\right), \; N_- = \frac{1}{2}\left(N - \frac{E}{\epsilon}\right) \tag{7.31}$$

Broj mogućih mikrostanja je dat sa:

$$\Gamma = \binom{N}{N_+} = \binom{N}{N_-} = \frac{N!}{N_+!(N-N_+)!} = \frac{N!}{N_+!N_-!} = \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}\left(N+\frac{E}{\epsilon}\right)\right)!\left(\frac{1}{2}\left(N-\frac{E}{\epsilon}\right)\right)!} \tag{7.32}$$

Entropija je data sa:

$$S = k_B \ln\Gamma = k_B \ln\left(\frac{N!}{\left(\frac{1}{2}\left(N+\frac{E}{\epsilon}\right)\right)!\left(\frac{1}{2}\left(N-\frac{E}{\epsilon}\right)\right)!}\right) \tag{7.33}$$

Kada je $N >> 1$ možemo iskoristiti Stirlingovu aproksimaciju i dobijamo za entropiju: 6

$$S = k_B\left(N\ln N - \frac{1}{2}\left(N+\frac{E}{\epsilon}\right)\ln\left(\frac{N}{2}+\frac{E}{2\epsilon}\right) - \frac{1}{2}\left(N-\frac{E}{\epsilon}\right)\ln\left(\frac{N}{2}-\frac{E}{2\epsilon}\right)\right) \tag{7.34}$$

Dalje koristimo definiciju:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N \tag{7.35}$$

i dobijamo:

$$\frac{1}{T} = -\frac{k_B}{2\epsilon}\ln\left(\frac{N}{2}+\frac{E}{2\epsilon}\right) + \frac{k_B}{2\epsilon}\ln\left(\frac{N}{2}-\frac{E}{2\epsilon}\right) \tag{7.36}$$

odnosno:

$$\frac{2\epsilon}{k_B T} = \ln\left(\frac{\frac{N}{2}-\frac{E}{2\epsilon}}{\frac{N}{2}+\frac{E}{2\epsilon}}\right) \tag{7.37}$$

Iz prethodna relacije se dobija da je energija sistema:

$$E = -N\epsilon\frac{e^{2\beta\epsilon}-1}{e^{2\beta\epsilon}+1} \tag{7.38}$$

odnosno[6]:

$$E = -N\epsilon\tanh(\beta\epsilon) \tag{7.39}$$

[6] *Ovde koristimo identitet:*

$$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Zadatak 7. Jednodimenzionalni lanac se sastoji od velikog broja elemenata. Dužina svakog elementa iznosi a. Krajevima lanca treba da se poveže rastojane koje iznosi x. Elementi mogu slobodno da se okreću oko spojnih tačaka. Odrediti entropiju ovog sistema.

Rešenje

Na Slici 3. je prikazan lanac koji je opisan u tekstu zadatka. Neka sa N_+ označimo broj elemenata slaganih (spojenih) udesno, dok sa N_- broj elemenata slaganih ulevo. Na osnovu toga za dužinu x će važiti:

$$x = (N_+ - N_-)a$$

Broj mogućih mikrostanja je jednak broju načina na koji se može odabrati N_+ elemenata od N elemenata:

$$\Gamma = \frac{N!}{N_+!(N - N_+)!} = \frac{N!}{N_+!N_-!}$$

dok dodatno važi:

$$N = N_+ + N_-$$

Lako se dobija da važi:

$$N_+ = \frac{1}{2}\left(N + \frac{x}{a}\right)$$

$$N_- = \frac{1}{2}\left(N - \frac{x}{a}\right)$$

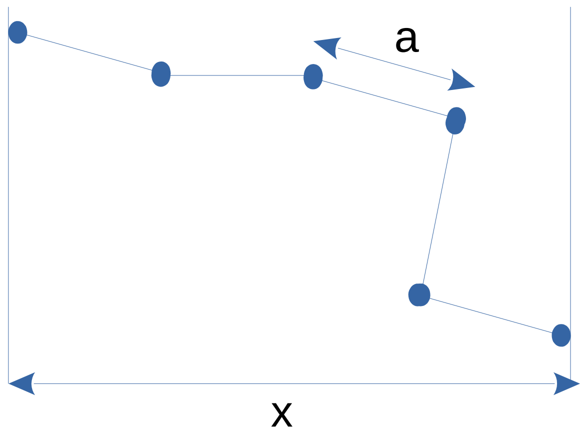
Na osnovu toga je:

$$\Gamma = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}\left(N + \frac{x}{a}\right)\right]!\left[\frac{1}{2}\left(N - \frac{x}{a}\right)\right]!}$$

Tražena entropija sistema je: 7

$$S = k_B \ln \Gamma = k_B \ln\left(\frac{N!}{\left[\frac{1}{2}\left(N + \frac{x}{a}\right)\right]!\left[\frac{1}{2}\left(N - \frac{x}{a}\right)\right]!}\right)$$

Rezultat se može dodatno uprostiti ako se iskoristi Stirlinogva aproksimacija za slučaj kada je $N >> 1$.



Slika 3. Jednostavan prikaz jednodimenzionog lanca iz Zadatka 7.

Zadatak 8. Fizički sistem se sastoji od N različitih čestica i svaka se može naći u stanju sa energijom jednakom nuli ili $\epsilon > 0$. Pobuđeno stanje ima degeneraciju $d = 4$ a osnovno stanje je nedegenerisano. Ukupna energija sistema je $E = n\epsilon$ gde je $n > 0$, i predtavlja neki ceo broj. Odrediti entropiju i energiju sistema.

Rešenje

Pošto je energija data sa:

$$E = n\epsilon \tag{7.40}$$

n predstavlja broj čestica koje imaju energiju ϵ. Pošto je to stanje degenerisano broj mogućih mikrostanja će biti:

$$\Gamma = \binom{N}{n} 4^n \tag{7.41}$$

odnosno broj mikrostanja je jednak proizvodu broja načina da odaberemo n čestica i stepena degeneracije za svaku od čestica sa energijom ϵ. Entropija sistema je data sa:

$$S = k_B \ln \Gamma = k_B \ln \left(\binom{N}{n} 4^n \right) = k_B \ln \left(\frac{N!}{n!(N-n)!}{}^{n} \right) \tag{7.42}$$

Dalje uzimamo da važi $N, n >> 1$ i korišćenjem Stirlingove aproksimacije dobijamo:

$$S = k_B \left(N \ln N + n \ln 4 - n \ln n - (N-n) \ln(N-n) \right) \tag{7.43}$$

8

odnosno kada zamenimo $n = \frac{E}{\epsilon}$ imamo:

$$S = k_B \left(N \ln N + \frac{E}{\epsilon} \ln 4 - \frac{E}{\epsilon} \ln \left(\frac{E}{\epsilon} \right) - \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) \ln \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) \right) \tag{7.44}$$

Dalje koristeći:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_N \tag{7.45}$$

dobijamo:

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{\epsilon} \ln \left(\frac{4\left(N - \frac{E}{\epsilon}\right)}{\frac{E}{\epsilon}} \right) \tag{7.46}$$

Lako se dobija iz prethodne relacije da je energija sistema data sa:

$$E = \frac{4N\epsilon}{4 + e^{\frac{\epsilon}{k_B T}}} \tag{7.47}$$

Zadatak 9. Nivoi energije oscilatora frekvencije ν su:

$$\epsilon_n = (n + \frac{1}{2}) h\nu$$

Za sistem od N oscilatora, zanemarljive medjusobne interakcije, odrediti njegovu entropiju i energiju. Raditi u formalizmu mikrokanonskog ansambla.

Rešenje:

Ukupna energija ovog skupa oscilatora je data sa:

9

$$E = \sum_{i=1}^{N} \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h\nu \tag{7.48}$$

Možemo energiju prikazati na sledeći način:

$$E = Mh\nu + \frac{1}{2}Nh\nu \tag{7.49}$$

gde smo uveli:

$$M = \sum_{i=1}^{N} n_i \tag{7.50}$$

kao sumu po pojedinačnim kvantnim brojevima. Na osnovu toga, broj mikrostanja će biti broj kombinacija sa ponavljanjem koje će predstavljati broj načina uzimamo N celi brojeva n_i tako da im je suma M, i taj broj je dat sa:

$$\Gamma = \binom{N+M-1}{M} = \frac{(N+M-1)!}{M!(N-1)!} \tag{7.51}$$

Entropija je na osnovu toga:

$$S = k_B \ln \Gamma = k_B \ln \left(\frac{(N+M-1)!}{M!(N-1)!} \right) \tag{7.52}$$

gde za slučaj kada su $N, M >> 1$ možemo uzeti da je:

$$S = k_B \ln \Gamma = k_B \ln \left(\frac{(N+M)!}{M!N!} \right) \tag{7.53}$$ 9

Dodatno možemo iskoristiti Stirlingovu aproksimaciju i na osnovu toga dobiti:

$$S = k_B \left((N+M) \ln (N+M) - M \ln M - N \ln N \right) \tag{7.54}$$

Dalje, koristimo definiciju:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V,N} \tag{7.55}$$

koju ćemo korisiti u modifikovanom obliku[7]:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_{V,N} \left(\frac{\partial M}{\partial E} \right)_{V,N} = \frac{1}{h\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_{V,N} \tag{7.56}$$

Koristeći prethodnu relaciju dobija se:

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B T}{h\nu} \ln \left(\frac{N+M}{M} \right) = \frac{k_B T}{h\nu} \ln \left(\frac{N}{M} + 1 \right) = \frac{k_B T}{h\nu} \ln \left(\frac{N}{\frac{E}{h\nu} - \frac{1}{2}N} + 1 \right) \tag{7.57}$$

Iz prethodnog rezultata se dobija tražena energija sistema:

$$E = \frac{Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} + \frac{1}{2}Nh\nu \tag{7.58}$$

[7] $M = \frac{E}{h\nu} - \frac{1}{2}N$

8 Kanonski ansambl

Zadatak 1. Polazeći od definicije statističke sume Z u fomalizmu kanonskog ansambla dokazati da za toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini važi:

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T}\ln Z\right)_V$$

Rešenje:

Polazimo od definicije kanonske statističke sume:

$$Z(T,V,N) = \int_\Gamma e^{-\frac{1}{k_B T}H(\vec{p},\vec{q})}d\Gamma \tag{8.1}$$

koju diferenciramo po temperaturi:

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \int_\Gamma \frac{1}{k_B T^2}H(\vec{p},\vec{q})e^{-\frac{1}{k_B T}H(\vec{p},\vec{q})}d\Gamma \tag{8.2}$$

odnosno imamo:

$$k_B T^2 \frac{\partial Z}{\partial T} = \int_\Gamma H(\vec{p},\vec{q})e^{-\frac{1}{k_B T}H(\vec{p},\vec{q})}d\Gamma \tag{8.3}$$

Dalje se dobija da važi:

$$\frac{1}{Z}\cdot k_B T^2 \frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{1}{Z}\cdot\int_\Gamma H(\vec{p},\vec{q})e^{-\frac{1}{k_B T}H(\vec{p},\vec{q})}d\Gamma \tag{8.4}$$

Srednja energija je data sa:

1

$$\langle H\rangle \equiv U = \frac{1}{Z}\cdot\int_\Gamma H(\vec{p},\vec{q})e^{-\frac{1}{k_B T}H(\vec{p},\vec{q})}d\Gamma \tag{8.5}$$

odakle je:

$$\frac{k_B T^2}{Z}\frac{\partial Z}{\partial T} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T}(\ln Z) = \langle H\rangle = U \tag{8.6}$$

Za toplotni kapacitet u formalizmu kanonskog ansambla imamo:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial T}\right)_V \tag{8.7}$$

odnosno:

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T}\ln Z\right)_V \tag{8.8}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. Idealan gas od N jednoatomskih molekula nalazi se u kontaktu sa termostatom temperature T. Odrediti entropiju ovog sistema u formalizmu kanonskog ansambla.

Rešenje:

Hamiltonijan sistema je jednak sumi hamiltonijana pojedinačnih molekula:

2

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i \tag{8.9}$$

Statistička suma sistema je data sa[8]:

$$Z_N = \int_\Gamma e^{-\beta \sum_{i=1}^N H_i} \prod_{i=1}^N \frac{d^3p_i d^3q_i}{h^{3N} N!}$$

Dodatno možemo pisati:

$$Z_N = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \underbrace{\int_\Gamma e^{-\beta H_1} \frac{d^3p_1 d^3q_1}{h^3}}_{Z_1}$$

odnosno važi:

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!}$$

gde je Z_1 statistička suma jednog molekula. Ovako se određuje statistička suma kada imamo neinteragujući sistem identičnih molekula (čestica i sl.). Dalje određujemo:

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3p d^3q$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp_x dp_y dp_z \int d^3q$$

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{p_y^2}{2m}} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{p_z^2}{2m}} dp_z$$

2

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}$$

odnosno za statističku sumu celog sistema dobijamo:

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!} = \frac{V^N}{h^{3N}} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}N}$$

Slobodna energija se određuje dalje kao:

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$F = -k_B T \ln \left(\frac{V^N}{h^{3N}} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}N} \right)$$

$$F = -k_B T \ln V^N + k_B T \ln h^{3N} + k_B T \ln N! - k_B T \ln(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}N}$$

Određujemo dalje entropiju iz:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N}$$

i dobijamo:

$$S = k_B \ln \left(\frac{V^N}{h^{3N} N!} \right) + \frac{3Nk_B}{2} + \frac{3N}{2} k_B \ln(2\pi m k_B T)$$

[8] *Uvedene su oznake $d^3p = dp_x dp_y dp_z$ i $d^3q = dxdydz$.*

Zadatak 3. Razmatramo gas koji se sastoji od međusobno neinteragujućih čestica, od kojih svaka ima energiju:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \alpha p^3$$

gde su ϵ_0 i α konstante a p je intenzitet impulsa chestice. Odrediti statističku sumu ovog gasa. Na osnovu toga izračunati koliki rad vrši 1 *mol* gasa pri adijabatskoj ekspanziji iz stanja sa zapreminom V_1 i temperaturom T_1 u stanje sa zapreminom V_2 i temperaturom T_2. Koliko iznosi T_2 nakon ekspanzije?

Rešenje:

Hamiltonijan sistema je dat sa:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i, \quad \epsilon_i = \epsilon_0 + \alpha p_i^3$$

Dalje, statistička suma sistema se određuje kao:

$$Z_N = \frac{1}{N h^{3N}} \int \dots \int e^{-\beta H} \prod_{i=1}^{N} d^3 p_i d_i^3$$

odnosno:

$$Z_N = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int \dots \int e^{-\beta \sum_i \epsilon_i} \prod_i d^3 p_i$$

Pošto imamo neinteragujući sistem statistička suma se svodi na:

$$Z_N = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \left(\int e^{-\beta\epsilon} d^3 p \right)^N$$

Prelaskom na sferni koordinatni sistem dobijamo:

$$Z_N = \frac{(4\pi V)^N}{N! h^{3N}} \left(\int_0^\infty e^{-\beta(\epsilon_0 + \alpha p^3)} p^2 dp \right)^N \quad (3)$$

Uvođenjem smene u integralu:

$$\beta\alpha p^3 = t, \quad 3\beta\alpha p^2 dp = dt$$

dobija se:

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left[\frac{4\pi V k_B T}{3\alpha h^3} e^{-\beta\epsilon_0} \right]^N$$

Za slobodnu energiju dobijamo:

$$F = -k_B T \ln Z_N = -k_B T \ln \left(\frac{4\pi V k_B T}{3\alpha h^3} \right)^N + N\epsilon_0 + k_B T \ln N!$$

Pritisak je dat sa:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} = \frac{k_B T N}{V}$$

odakle je:

$$pV = N k_B T$$

Za entropiju imamo:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$$

odnosno:

$$S = Nk_B \ln\left(\frac{4\pi V}{3\alpha h^3} k_B T\right) + Nk_B - k_B \ln N!$$

Za adijabatski proces važi da je $S = const.$ što će biti zadovoljeno ako je:

$$V \cdot T = const.$$

što predstavlja jednačinu adijabatskog procesa ovog sistema. Na osnovu toga za traženi rad dobijamo: 3

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{Nk_B T}{V} dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{Nk_B TV}{V^2} dV \\ &= TVNk_BT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^2} dV = const. \cdot \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) \end{aligned} \tag{8.10}$$

Temperatura nakon ekspanzije iz jednačine adijabate je data sa:

$$T_2 = \frac{T_1 V_1}{V_2}$$

Zadatak 4. Razmatramo idealan gas koji se sastoji od N jednoatomskih molekula. Gas se nalazi u beskonačno visokom cilindru (osnove B) pod uticajem homogenog gravitacionog polja. Gas se nalazi u stanju toplotne ravnoteže. Odrediti statističku sumu i slobodnu energiju sistema. Masa svakog molekula je m.

Rešenje:

Hamiltonijan sistema je dat sa:

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + mgz_i\right)$$

gde z predstavlja poziciju čestice duž ose cilindra baze B. Statistička suma ovog sistema je:

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \int_\Gamma e^{-\beta H} \prod_{i=1}^{N} d^3p_i d^3q_i$$ 4

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \left[\int e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} d^3p \int \int_B dxdy \int_0^\infty e^{-\beta mgz} dz\right]^N$$

Uvođenjem smene:

$$\beta mgz = t, \quad dz = \frac{dt}{\beta mg}$$

dobija se:

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}}(2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} B^N \left(\frac{k_B T}{mg}\right)^N$$

Slobodna energija sistema iznosi:

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$F = -k_B T \ln\left(\frac{1}{N!h^{3N}}(2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} B^N \left(\frac{k_B T}{mg}\right)^N\right)$$

4

Zadatak 5. Razmatramo sistem od N klasičnih linearnih harmonijskih oscilatora frekvencije ω. Pretpostavljajući da oscilatori zanemarljivo slabo interaguju odrediti statističku sumu, slobodnu energiju, entropiju i $\langle H \rangle$.

Rešenje:

Hamiltonijan sistema je:

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_i^2\right)$$

Statistička suma je data sa:

$$Z = \frac{1}{N!h^N}\int ... \int e^{-\beta H} dq_1...dq_N dp_1...dp_N$$

odnosno, pošto oscilatori zanemarljivo slabo interaguju:

$$Z = \frac{1}{N!h^N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} dp \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m\omega^2 q^2}{2}} dq\right)^N$$

Rešavanjem integrala dobijamo:

$$Z = \frac{1}{N!h^N}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\beta}{2m}}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\beta m\omega^2}{2}}}\right)^N = \frac{1}{N!h^N}\left(\frac{2\pi}{\beta\omega}\right)^N = \frac{1}{N!h^N}\left(\frac{2\pi k_B T}{\omega}\right)^N$$

Slobodna energija je:

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln\left[\frac{1}{N!h^N}\left(\frac{2\pi k_B T}{\omega}\right)^N\right]$$

Srednja energija $\langle H \rangle$ se može odrediti iz:

$$\langle H \rangle = \frac{k_B T^2}{Z}\frac{\partial Z}{\partial T}$$

a pošto je poznato Z lako se dobija:

$$\langle H \rangle = N k_B T$$

Na kraju entropija je:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = k_B N + k_B \ln\left[\frac{1}{N!h^N}\left(\frac{2\pi k_B T}{\omega}\right)^N\right]$$

5

Zadatak 6. Sistem se nalazi u stanju toplotne ravnoteže sa okolinom. Dokazati da je srednje kvadratno odstupanje (disperzija) data sa:

$$D(H) = k_B T^2 C_V$$

Raditi u formalizmu kanonskog ansambla.

Rešenje:

Disperzija je data definicjom:

$$D(H) = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \tag{8.11}$$

Srednju vrednost energije računamo u formalizmu kanonskog ansambla po definiciji:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{Z} \int_\Gamma H e^{-\beta H} d\Gamma \tag{8.12}$$

Diferenciranjem relacije (8.12) po β dobijamo:

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \int_\Gamma H e^{-\beta H} d\Gamma - \underbrace{\frac{1}{Z} \int_\Gamma H^2 e^{-\beta H} d\Gamma}_{\langle H^2 \rangle} \tag{8.13}$$

odakle se dalje dobija:

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = -\langle H^2 \rangle - \frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \int_\Gamma H e^{-\beta H} d\Gamma \tag{8.14}$$

Prvo odredimo:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_\Gamma H e^{-\beta H} d\Gamma \right) = -\int_\Gamma H e^{-\beta H} d\Gamma = -Z \langle H \rangle \tag{8.15}$$ 6

pa imamo:

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = -\langle H^2 \rangle + \frac{1}{Z^2} Z \langle H \rangle \int_\Gamma H e^{-\beta H} d\Gamma \tag{8.16}$$

odnosno:

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = -\langle H^2 \rangle + \langle H \rangle^2 = -D(H) \tag{8.17}$$

Toplotni kapacitet je definisan sa:

$$C_V = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial T} = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} \tag{8.18}$$

odakle dobijamo:

$$C_V = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = \frac{1}{k_B T^2} D(H) \tag{8.19}$$

pa je disperzija:

$$D(H) = k_B T^2 C_V \tag{8.20}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 7. Razmatramo idealni gas koji se sastoji od N čestica u zapremini V.

Energija čestice je data sa:

$$\epsilon = cp$$

gde je c konstanta, dok je p impuls čestice. Odrediti statističku sumu, slobodnu energiju, entropiju i $\langle H \rangle$.

Rešenje

Pošto razmatramo idealni gas za statističku sumu će važiti:

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!}$$

gde je Z_1 statistička suma jedne čestice. Prvo određujemo:

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int d^3p d^3q e^{-\beta H}$$

a pošto je energija čestice $H = \epsilon = cp$ imamo:

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int d^3p d^3q e^{-\beta cp}$$

odnosno prelaskom na sferni koordinatni sistem:

$$Z_1 = \frac{4\pi V}{h^3} \int dp p^2 e^{-\beta cp}$$

Posle smene $\beta pc = t$ se dobija:

$$Z_1 = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{1}{\beta^3 c^3} \Gamma(3) = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{1}{\beta^3 c^3}$$

pa je statistička suma: 7

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\frac{8\pi V}{\beta^3 c^3} \right)^N$$

Slobodna energija je:

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln \left[\frac{1}{N! h^{3N}} \left(\frac{8\pi V}{\beta^3 c^3} \right)^N \right] = -k_B T \ln \left[\frac{1}{N! h^{3N}} \left(\frac{8\pi V (k_B T)^3}{c^3} \right)^N \right]$$

Entropija je:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = 3Nk_B + k_B N \ln \left(\frac{1}{N! h^{3N}} \frac{8\pi V (k_B T)^3}{c^3} \right)$$

Srednja energija je data sa:

$$\langle H \rangle = \frac{k_B T^2}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T}$$

a pošto imamo statističku sumu, daljim računom se dobija:

$$\langle H \rangle = 3Nk_B T$$

Zadatak 8. Dokazati važenje Daltonovog zakona za smešu n idealnih gasova u formalizmu kanonskog ansambla.

Rešenje

Ukoliko posmatramo smešu n idealnih gasova mi treba da dokažemo da važi:

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

odnosno da je ukupan pritisak smeše gasova jedak sumi pritisaka pojedinačnih gasova u smeši. Hamiltonijan sistema je jedak sumi pojedinačnih hamiltonijana svakog gasa:

$$H(\vec{q},\vec{p}) = \sum_{i=1}^{n} H_i(\vec{q},\vec{p})$$

i element faznog prostora je dat sa:

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^{n} d\Gamma_i$$

Statistička suma je data sa:

$$Z = \int_{\Gamma} e^{-\beta H(\vec{q},\vec{p})} d\Gamma$$

Dalje imamo:

$$Z = \int_{\Gamma} e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} H_i(\vec{q},\vec{p})} \prod_{i=1}^{n} d\Gamma_i = \prod_{i=1}^{n} Z_i \tag{8}$$

odnosno statistička suma smeše je jednaka proizvodu statističkih suma pojedinačnih gasova. Na osnovu toga za slobodnu energiju se dobija:

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln \left(\prod_{i=1}^{n} Z_i \right) = -k_B T \ln Z_1 - k_B T \ln Z_2 - k_B T \ln Z_3 - \ldots - k_B T \ln Z_n$$

odnosno:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n$$

gde je slobodna energija celog sistema jednaka sumi slobodnih energija pojedinačnih gasova koji čine smešu. Diferenciranjem prethodnog rezultata po zapremini pri konstantnoj temperaturi i broju čestica se dobija:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial V}\right)_{T,N} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial V}\right)_{T,N} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial V}\right)_{T,N} + \ldots + \left(\frac{\partial F_n}{\partial V}\right)_{T,N}$$

odnosno za pritisak smeše se dobija:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n \quad \square$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 9. N nezavisnih i neidentičnih čestica kreću se u jednodimenzionom segmentu između $q = 0$ i $q = L$. Odrediti termičku jednačinu stanja sistema iz sledećeg hamiltonijana za jednu česticu:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha \ln\left(\frac{q}{L_0}\right)$$

gde su α i L_0 konstante. Raditi u formalizmu kanonskog ansambla.

Rešenje:

Prvo treba da odredimo statističku sumu ovog sistema. Pošto imamo neidentične i neinteragujuće čestice važi:

$$Z = Z_1^N \tag{8.21}$$

gde je Z_1 statistička suma za jednu česticu. Ona se odredđuje po definiciji kao:

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int\int e^{-\beta H} dpdq = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} dp \int_0^L e^{\beta\alpha\ln\left(\frac{q}{L_0}\right)} \tag{8.22}$$

i dobijamo:

$$Z_1 = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\frac{L^{\alpha\beta+1}}{\alpha\beta+1}\frac{1}{L_0^{\alpha\beta}} \tag{8.23}$$

pa je: (9)

$$Z = \left(\frac{1}{h}\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\frac{L^{\alpha\beta+1}}{\alpha\beta+1}\frac{1}{L_0^{\alpha\beta}}\right)^N \tag{8.24}$$

Slobodna energija je data sa:

$$F = -k_B T \ln Z = -Nk_B T \ln\left(\frac{1}{h}\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\frac{L^{\alpha\beta+1}}{\alpha\beta+1}\frac{1}{L_0^{\alpha\beta}}\right) \tag{8.25}$$

Kada imamo slobodnu energiju možemo odrediti pritisak[9]:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{T,N} = \frac{Nk_BT}{L}\left(1 + \frac{\alpha}{k_BT}\right) \tag{8.26}$$

Prethodni rezultat predstavlja traženu termičku jednačinu stanja sistema.

[9] *Obratite pažnju na napravljenu generalizaciju definicije za jednodimenzioni slučaj.*

Zadatak 10. Posmatramo česticu koja se kreće slobodno unutar zapremine V. Dokazati da sistem od N ovakvih neinetragujućih čestica u termodinamičkoj ravnoteži, bez obzira na oblik njihove kinetičke energije ima jednačinu stanja idealnog gasa. Pretpostaviti da je hamiltonijan separabilan.

Rešenje

Pod separabilnim hamiltonijanom smatramo da se može zapisati u formi:

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = T(\vec{p}) + U(\vec{q})$$

gde su $T(\vec{p})$ i $U(\vec{q})$ kinetička i potencijalna energija respektivno. Ukoliko se čestice (10) nalaze u zapremini V za potencijalnu energiju čestica idealnog gasa imamo:

$$U(\vec{q}) = \begin{cases} 0 & \vec{q} \in V \\ \infty & \vec{q} \notin V \end{cases}$$

Za N neinteragujućih čestica važi:

$$Z = \frac{1}{h^{3N}N!}\left(\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{T(\vec{p})}{k_B T}} dp_x dp_y dp_z \iiint e^{-\frac{U(\vec{q})}{k_B T}} dq_x dq_y dq_z\right)^N$$

Posle integracije po q_x, q_y i q_z:

$$Z = \frac{V^N}{h^{3N}N!}\left(\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{T(\vec{p})}{k_B T}} dp_x dp_y dp_z\right)^N$$

Integracija po impulsima će dati kao rezultat neku funkciju temperature T. Ukoliko tu funkciju, odnosno ceo rezultat integracije po impulsima označimo sa $I(T)$ rezultat je:

$$Z = \frac{V^N}{h^{3N}N!} I^N$$

10

Na osnovu toga, slobodna energija je data sa:

$$F = -k_B T \ln Z$$

odnosno:

$$F = -k_B T \ln\left(\frac{V^N}{h^{3N}N!} I^N\right)$$

Pritisak se dobija iz:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$$

i iznosi:

$$p = \frac{N k_B T}{V} \rightarrow pV = N k_B T$$

Zadatak 11. Razmatramo sistem čestica koje se nalaze u kontaktu sa termostatom temperature T. Čestice međusobno ne interaguju. Odrediti verovatnoću da energija jedne čestice bude između ϵ i $\epsilon + d\epsilon$. Primeniti dobijeni rezultat za slučaj kada je $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$. Raditi u formalizmu kanonskog ansambla.

Rešenje:

Za jednu česticu $N = 1$ hamiltonijana (energije) $H = \epsilon$ u formalizmu kanonskog ansambla fazna gustina verovatnoće je:

$$w = \frac{1}{h^3}\frac{e^{-\beta H}}{Z} \tag{8.27}$$

Elementarna fazna zapremina je data sa:

11

$$d\Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon} d\epsilon \tag{8.28}$$

gde je $\frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon} \equiv \Omega(E)$ površina u faznom prostoru. Statistička suma je:

$$Z = \frac{1}{h^3}\int e^{-\beta\epsilon}\frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon} d\epsilon \tag{8.29}$$

Stoga, izraz:

$$dw = \frac{1}{h^3}\frac{e^{-\beta\epsilon}}{Z}\frac{\partial\Gamma}{\partial\epsilon}d\epsilon \tag{8.30}$$

možemo interpretirati kao verovatnoću da čestica ima energiju u intervalu između ϵ i $\epsilon + d\epsilon$. Fazna zapremina za česticu sa $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ je:

$$\Gamma(\epsilon) = \int \dots \int d^3p d^3q = V \iiint\limits_{p_x^2+p_y^2+p_z^2=2m\epsilon} dp_x dp_y dp_z = V \cdot \frac{4}{3}(2m\epsilon)^{\frac{3}{2}}\pi \tag{8.31}$$

11

Odatle se dobija da:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\epsilon} = 2V\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}} \tag{8.32}$$

Na osnovu toga se dobija:

$$dw = \frac{e^{-\beta\epsilon}\frac{4}{3}V\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon}{\int\limits_0^\infty e^{-\beta\epsilon}\frac{4}{3}V\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon} = \frac{e^{-\beta\epsilon}\sqrt{\epsilon}d\epsilon}{(k_BT)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \tag{8.33}$$

što predstavlja traženu verovatnoću[10].

[10] *Kada je poznat izraz za verovtnoću probajte da odredite srednju (očekivanu) energiju koristeći definiciju:*

$$\overline{\epsilon} \equiv \langle\epsilon\rangle = \int\limits_0^\infty \epsilon\, dw = ?$$

Zadatak 12. Fizički sistem se sastoji od N različitih spinova sa mogućim vrednostima ± 1. Ove vrednosti odgovaraju energijskim stanjima $\pm\epsilon$. Odrediti ukupnu energiju sistema. Raditi u formalizmu kanonskog ansambla.

Rešenje:

Uz pretpostavku da spinovi ne intereaguju međusobno kanonska statistička suma N spinova je jednaka:

$$Z = Z_1^N \tag{8.34}$$

gde je Z_1 statistička suma za jedan spin. Ona je jednaka[11]:

$$Z_1 = \sum_{m=\pm1} e^{-m\beta\epsilon} = e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon} = 2\cosh(\beta\epsilon) \tag{8.35}$$

[11] *Ovde smo iskoristili:*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Na osnovu toga se dobija:

$$Z = 2^N \cosh^N(\beta\epsilon) \tag{8.36}$$

12

Slobodna energija je:

$$F = -k_BT\ln Z = -Nk_BT\ln\left(2\cosh(\beta\epsilon)\right) = -Nk_BT\ln\left(2\cosh\left(\frac{\epsilon}{k_BT}\right)\right) \tag{8.37}$$

Entropija sistema iznosi:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,V} = Nk_BT\ln\left(2\cosh\left(\frac{\epsilon}{k_BT}\right)\right) - \frac{N\epsilon}{T}\tanh\left(\frac{\epsilon}{k_BT}\right) \tag{8.38}$$

Unutrašnja energija je na osnovu prethodnih rezultata[12]:

$$U = F + TS = -N\epsilon\tanh(\beta\epsilon) \tag{8.39}$$

[12] *Pogledajte rešenje Zadatka 6. iz prethodnog poglavlja. Primećujete li nešto zanimljivo?*

Zadatak 13. Razmatramo sistem od N kvantnih harmonijskih oscilatora koje zanemarljivo slabo interaguju. Odrediti kanonsku statistichku sumu, slobodnu energiju i entropiju sistema.

Rešenje:

Energije oscilatora su:

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{8.40}$$

Za neinteragujući sistem neidentičnih oscilatora statističku sumu dobijamo kao:

$$Z = Z_1^N = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_n}\right)^N = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}\right)^N = \left(e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^n\right)^N \tag{8.41}$$

Dobija se[13]:

$$Z = \left(e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)^N \tag{8.42}$$

Dodatno rezultat predstavljamo u sledećoj formu[14]: 13

$$Z = \left(e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{e^{\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}\right)^N = \left(\frac{1}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{\frac{-\beta\hbar\omega}{2}}}\right)^N = \left(\frac{1}{2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}\right)^N \tag{8.43}$$

Slobodna enegija je onda:

$$F = -k_BT\ln Z = Nk_BT\ln\left(2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right) \tag{8.44}$$

Za entropiju se dobija:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{N\hbar\omega}{2T}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) - Nk_B\ln\left(2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right) \tag{8.45}$$

[13] *Koristimo:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

[14] *Ovde koristimo identitet:*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Zadatak 14. Razmatramo tzv. Izingov model. Fizički sistem čiji je hamiltonijan:

$$H = -\sum_{i=1}^{N-1} J_iS_iS_{i+1}$$

gde su J_i konstante interakcije, a veličine S_i mogu uzimati samo dve vrednosti $+1$ i -1. Odrediti kanonsku statističku sumu sistema u slučaju kada indeks i numeriše čvorove neke jednodimenzionalne kristalne rešetke.

Rešenje:

Pošto sada razmatramo jedan interagujući sistem ne postoje olakšice u pogledu računanja statističke sume pa je ona za sistem od N čvorova rešetke data sa:

$$Z_N = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\dots\sum_{S_N=\pm1} e^{\beta\sum_{i=1}^{N-1}J_iS_iS_{i+1}} \tag{8.46}$$

14

gde je $Z_1 = 2$. Dodajemo jedan dodatni čvor pa važi:

$$Z_{N+1} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\dots\sum_{S_N=\pm1}\sum_{S_{N+1}=\pm1} e^{\beta\sum_{i=1}^{N-1}J_iS_iS_{i+1}+\beta J_NS_NS_{N+1}} \tag{8.47}$$

odnosno:

$$Z_{N+1} = Z_N \sum_{S_N=\pm 1} e^{\beta J_N S_N S_{N+1}} = Z_N \left(e^{-\beta J_N S_N} + e^{\beta J_N S_N} \right) = Z_N \cdot 2 \cdot \cosh\left(\beta J_N\right) \quad (8.48)$$

jer i $S_N = \pm 1$ a kosinus hiperbolični je parna funkcija. Efektivno prethodna relacija predstavlja jednu rekurentnu relaciju i iz nje sledi da:

$$\begin{aligned} Z_N &= Z_{N-1} \cdot 2 \cdot \cosh\left(\beta J_{N-1}\right) \\ Z_{N-1} &= Z_{N-2} \cdot 2 \cdot \cosh\left(\beta J_{N-2}\right) \end{aligned} \quad (8.49)$$

14

i tako dalje. Zaključujemo da je statistička suma data sa:

$$Z_N = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \cosh\left(\beta J_i\right) \quad (8.50)$$

Zadatak 15. Sistem ima nedegenerisan spektar vrednosti energija $\epsilon_k = k\epsilon$ ($k = 0, 1, 2, ...$). Odrediti srednju energiju sistema. Raditi u formalizmu kanonskog ansambla.

Rešenje

Srednju energiju sistema u formalizmu kanonskog ansambla određujemo iz definicije:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_k \epsilon_k e^{-\beta \epsilon_k}}{\sum_k e^{-\beta \epsilon_k}} \quad (8.51)$$

odakle se lako prepoznaje statistička suma:

$$Z = \sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \quad (8.52)$$

Diferenciranjem statističke sume po parametru β dobija se:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\sum_k \epsilon_k e^{-\beta \epsilon_k} \quad (8.53)$$

Lako se prepoznaje da važi:

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\underbrace{\frac{1}{Z}\sum_k \epsilon_k e^{-\beta \epsilon_k}}_{\langle E \rangle} \quad (8.54)$$

15

odnosno:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial (\ln Z)}{\partial \beta} \quad (8.55)$$

Statistička suma datog sistema je:

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta k \epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\beta \epsilon}\right)^k = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon}} \quad (8.56)$$

Na osnovu toga srednja vrednost energije je:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial (\ln Z)}{\partial \beta} = \frac{\epsilon e^{-\beta \epsilon}}{1 - e^{-\beta \epsilon}} \cdot \frac{e^{\beta \epsilon}}{e^{\beta \epsilon}} = \frac{\epsilon}{e^{\beta \epsilon} - 1} \quad (8.57)$$

9 Veliki kanonski ansambl

Zadatak 1. Idealan gas se sastoji od N jednoatomskih molekula. Koristeći formalizam velikog kanonskog ansambla odrediti hemijski potencijal μ i pritisak sistema p.

Rešenje:

U formalizmu velikog kanonskog ansambla prvo treba da odredimo veliku statističku sumu. Polazimo od definicije:

$$\Xi(T,V,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \int_{\Gamma_N} e^{-\beta H_N(\vec{p},\vec{q})} d\Gamma_N \tag{9.1}$$

odnosno:

$$\Xi(T,V,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N \tag{9.2}$$

gde smo prepoznali kanonsku statističku sumu Z_N. Pošto znamo statističku sumu ovakvog sistema[15]:

$$Z_N = \frac{V^N}{h^{3N} N!} (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} \tag{9.3}$$

onda imamo da je:

$$\Xi(T,V,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \frac{V^N}{h^{3N} N!} (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} \tag{9.4}$$

Uvodimo oznake[16]:

$$\lambda = e^{\beta\mu}, \ \lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}} \tag{9.5}$$

1

pa se dobija:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \lambda^N \left(\frac{V}{\lambda_T^3}\right)^N = e^{\frac{\lambda V}{\lambda_T^3}} \tag{9.6}$$

Veliki termodinamički potencijal je dat sa:

$$\Omega = -k_B T \ln \Xi = -k_B T \frac{\lambda V}{\lambda_T^3} = -k_B T \ln \Xi = -k_B T \frac{e^{\beta\mu} V}{\lambda_T^3} \tag{9.7}$$

Dalje određujemo:

$$\langle N \rangle = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{V}{\lambda_T^3} e^{\beta\mu} \tag{9.8}$$

odakle se dobija za hemijski potencijal:

$$\mu = k_B T \ln\left(\frac{\lambda_T^3 \langle N \rangle}{V}\right) \tag{9.9}$$

Pritisak je dat sa:

$$p = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu} = \frac{k_B T}{\lambda_T^3} e^{\beta\mu} \tag{9.10}$$

Zadatak 2. Polazeći od definicije za entropiju u formalizmu velikog kanonskog ansam-

[15] *Videti Zadatak 2. iz poglavlja 8.*

[16] *Ove oznake ćemo koristiti i u narednim zadacima.*

bla i koristeći Kramersovu relaciju $\Omega = -pV$ dokazati važenje relacije:

$$pV = k_B T \ln \Xi$$

Rešenje:

Definicija entropije je data sa:

$$S = -k_B \langle \ln f(\vec{p},\vec{q}) \rangle \tag{9.11}$$

što u formalizmu velikog kanonskog ansabla računamo kao:

$$S = -k_B \sum_{N=0}^{\infty} \int_{\Gamma_N} f_N \ln\left(\frac{e^{-\beta(H_N(\vec{p},\vec{q})-\mu N)}}{\Xi} \right) d\Gamma_N \tag{9.12}$$

Sređivanjem se dobija:

$$S = k_B \beta \underbrace{\sum_{N=0}^{\infty} \int_{\Gamma_N} H_N f_N d\Gamma_N}_{\langle H_N \rangle \equiv U} - k_B \beta \mu \underbrace{\sum_{N=0}^{\infty} \int_{\Gamma_N} N f_N d\Gamma_N}_{\langle N \rangle} + k_B \ln \Xi \underbrace{\sum_{N=0}^{\infty} \int_{\Gamma_N} f_N d\Gamma_N}_{1} \tag{9.13}$$

2

Imamo da je:

$$S = \frac{U}{T} - \frac{\mu \langle N \rangle}{T} + k_B \ln \Xi \tag{9.14}$$

odnosno:

$$-k_B T \ln \Xi = U - TS - \mu \langle N \rangle = F - \mu \langle N \rangle \tag{9.15}$$

Dobijeno je da je:

$$\Omega = F - \mu \langle N \rangle \tag{9.16}$$

efektivno Ležandrova transformacija slobodne energije po broju čestica. Koristeći Kramersovu relaciju imamo:

$$pV = k_B T \ln \Xi \quad \square \tag{9.17}$$

Zadatak 3. Koristeći formalizam velikog kanonskog ansambla odrediti hemijski potencijal $\mu(T,p)$ za ultrarelativistički idealni gas koji se nalazi u zapremini V.

Rešenje:

Velika statistička suma je za sistem od N neinteragujućih čestica ovog gasa:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \lambda^N Z_1^N \tag{9.18}$$

gde je[17]:

$$Z_1 = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{1}{\beta^3 c^3} \tag{9.19}$$

3

Na osnovu toga se dobija:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \lambda^N \left(\frac{8\pi V}{h^3} \frac{1}{\beta^3 c^3} \right)^N = e^{\frac{8\pi V \lambda}{\beta^3 c^3 h^3}} \tag{9.20}$$

[17] *Videti Zadatak 7. iz poglavlja 8.*

Koristeći rezultat prethodnog zadatka imamo da je:

$$pV = k_B T \frac{8\pi V \lambda}{\beta^3 c^3 h^3} \tag{9.21}$$

3

odakle je:

$$\mu = k_B T \ln\left(\frac{pc^3 h^3}{8\pi k_B^4 T^4}\right) \tag{9.22}$$

Zadatak 4. Dokazati da statistička suma velikog kanonskog ansambla za klasični idealni gas, koji se sastoji od N jednoatomskih molekula ima oblik:

$$\Xi = e^{\lambda z}$$

Ako se gas nalazi u zapremini V koristeći raspodelu velikog kanonskog ansambla dokazati da je broj molekula koji se nalaze unutar male zapremine $v << V$ dat Poasonovom raspodelom:

$$P_n = e^{-\langle n\rangle} \frac{\langle n\rangle^n}{n!}$$

gde je $\langle n\rangle$ srednji broj molekula u zapremini v.

Rešenje:

Za idealni gas znamo da je :

$$\Xi = e^{\lambda Z_1} \tag{9.23}$$

gde je:

$$Z_1 = \frac{V}{h^3}(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}} \tag{9.24}$$

kanonska statistička suma jednog molekula. Odredimo $\langle N\rangle$ po definiciji:

$$\langle N\rangle = \frac{\sum\limits_{N=0}^{\infty} N\lambda^N Z_N}{\sum\limits_{N=0}^{\infty} \lambda^N Z_N} = \lambda \frac{\sum\limits_{N=0}^{\infty} N\lambda^{N-1} Z_N}{\sum\limits_{N=0}^{\infty} \lambda^N Z_N} = \frac{\lambda}{\Xi}\frac{\partial \Xi}{\partial\lambda} = \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}(\ln\Xi) \tag{9.25}$$

Na osnovu toga imamo da je:

4

$$\langle N\rangle = \lambda Z_1 = \frac{\lambda V}{\lambda_T^3} \tag{9.26}$$

Za podsistem u zapremini v raspodela se dobija polazeći od:

$$dw_n = \frac{e^{-\beta(H_n - \mu n)}}{\Xi}\frac{d\Gamma_n}{h^{3n} n!} \tag{9.27}$$

Važi da je ovde:

$$\langle n\rangle \lambda Z_1,\ \Xi = e^{\langle n\rangle} \tag{9.28}$$

Imamo da je:

$$dw_n = \frac{\langle n\rangle^n}{Z_1^n}\frac{1}{e^{\langle n\rangle}} e^{-\beta H_n}\frac{d\Gamma_n}{h^{3n} n!} \tag{9.29}$$

Posle integracije imamo:

$$w_n = \frac{\langle n\rangle^n}{Z_1^n}\frac{1}{e^{\langle n\rangle}}\frac{Z_1^n}{n!} = e^{-\langle n\rangle}\frac{\langle n\rangle^n}{n!} \quad \square \tag{9.30}$$

4

odnosno dobijena je Poasonova raspodela kao što je trebalo dokazati.

Zadatak 5. Dokazati u formalizmu velikog kanonskog ansambla da je disperzija $D(N)$ data sa:

$$D(N) = k_B T\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu}$$

Rešenje:

Po definiciji disperzija je data sa:

$$D(N) = \langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 \tag{9.31}$$

Srednja vrednost $\langle N\rangle$ se u formalizmu velikog kanonskog ansambla računa po definiciji računa kao:

$$\langle N\rangle = \frac{1}{\Xi}\sum_{N=0}^{\infty} N e^{\beta\mu N} Z_N \tag{9.32}$$

dok je srednja vrednost $\langle N^2\rangle$ data sa:

$$\langle N^2\rangle = \frac{1}{\Xi}\sum_{N=0}^{\infty} N^2 e^{\beta\mu N} Z_N \tag{9.33}$$

gde je velika statistička suma data sa:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N \tag{9.34}$$

5

Diferenciranjem prethodne relacije po hemijskom potencijalu dobijamo:

$$\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu} = -\frac{1}{\Xi^2}\frac{\partial\Xi}{\partial\mu}\sum_{N=0}^{\infty} N e^{\beta\mu N} Z_N + \frac{1}{\Xi}\sum_{N=0}^{\infty} N\beta N e^{\beta\mu N} Z_N \tag{9.35}$$

Dodatno treba da odredimo izvod velike statističke sume po hemijskom potencijalu i taj izvod je:

$$\frac{\partial\Xi}{\partial\mu} = \sum_{N=0}^{\infty} \beta N e^{\beta\mu N} Z_N \tag{9.36}$$

Na osnovu toga se dobija:

$$\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu} = -\frac{1}{\Xi^2}\sum_{N=0}^{\infty} \beta N e^{\beta\mu N} Z_N \sum_{N=0}^{\infty} N e^{\beta\mu N} Z_N + \frac{1}{\Xi}\sum_{N=0}^{\infty} N\beta N e^{\beta\mu N} Z_N \tag{9.37}$$

i možemo prepoznati srednje vrednosti prethodno definisane i imamo:

$$\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu} = -\beta\langle N\rangle^2 + \beta\langle N^2\rangle = -\frac{1}{k_B T}\langle N\rangle^2 + \frac{1}{k_B T}\langle N^2\rangle \tag{9.38}$$

Iz prethodne relacije se zaključuje da važi:

$$D(N) = k_B T \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \quad \square \tag{9.39}$$

5

Zadatak 6. Na površini na kojoj se nalazi N_0 centara adsorpcije, adsobovano je N molekula gasa ($N \leq N_0$). Dokazati da je hemijski potencijal μ dat sa:

$$\mu = k_B T \left(\ln \left(\frac{\langle N \rangle}{N_0 - \langle N \rangle} \right) - \ln a(T) \right)$$

gde je $a(T)$ statistička suma jednog adsorbovanog molekula. Pretpostaviti da svaki adsorbovani molekul ima istu energiju ϵ i da je interakcija adsorbovanih molekula zanemarljiva.

Rešenje

Ako je N adsorbovanih molekula, onda postoji $N_0 - N$ slobodnih centara adsorpcije. Sistem ima energiju $N\epsilon$, i samim tim poseduje degeneraciju u pogledu broja načina na koji možemo kreirati takav sistem od ukupno N_0 centara adsorpcije. Statistička suma je data sa:

$$Z_N = \frac{N_0!}{N!(N - N_0)!} e^{-\beta N \epsilon} \tag{9.40}$$

gde prepoznajemo statističku sumu jednog molekula $a(T) = e^{-\beta\epsilon}$. Samim tim velika statistička suma je data sa:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{N_0} \lambda^N Z_N = \sum_{N=0}^{N_0} \frac{N_0!}{N!(N - N_0)!} (\lambda \cdot a(T))^N \tag{9.41}$$

Lako se prepoznaje da suma u prethodnoj relaciji iznosi:

$$\Xi = (1 + \lambda \cdot a(T))^{N_0} \tag{9.42}$$

Veliki termodinamički potencijal se dobija iz definicije:

6

$$\Omega = -k_B T \ln \Xi \tag{9.43}$$

odnosno:

$$\Omega = -k_B T N_0 \ln(1 + \lambda \cdot a(T)) \tag{9.44}$$

Odredimo dalje $\langle N \rangle$ iz definicije:

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = -\beta \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \tag{9.45}$$

gde smo iskoristili definiciju fugaciteta:

$$\lambda = e^{\beta \mu} \tag{9.46}$$

Na osnovu toga, dalje imamo:

$$\langle N \rangle = \frac{N_0 \cdot \lambda \cdot a(T)}{1 + \lambda \cdot a(T)} \tag{9.47}$$

Iz odnosa:

$$\frac{\langle N\rangle}{N_0} = \frac{\lambda\cdot a(T)}{1+\lambda\cdot a(T)} = \frac{\lambda\cdot a(T)+1-1}{1+\lambda\cdot a(T)} = 1-\frac{1}{1+\lambda\cdot a(T)} \tag{9.48}$$

dobijamo:

$$\frac{1}{1+\lambda\cdot a(T)} = 1-\frac{\langle N\rangle}{N_0}$$

$$1+\lambda\cdot a(T) = \frac{N_0}{N_0-\langle N\rangle}$$

$$\lambda = \frac{1}{a(T)}\frac{\langle N\rangle}{N_0-\langle N\rangle}$$

$$e^{\beta\mu} = \frac{1}{a(T)}\frac{\langle N\rangle}{N_0-\langle N\rangle}$$

$$\beta\mu = \ln\left(\frac{\langle N\rangle}{N_0-\langle N\rangle}\right)-\ln a(T)$$

6

Na kraju za hemijski potencijal se dobija:

$$\mu = k_B T\left(\ln\left(\frac{\langle N\rangle}{N_0-\langle N\rangle}\right)-\ln a(T)\right) \quad \square \tag{9.49}$$

što je i trebalo dokazati.

10 Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Sistem se sastoji od N molekula idealnog gasa u zapremini V. Odrediti entropiju, termičku i kaloričku jednačinu stanja sistema, ako je poznato da je fazna zapremina koja odgovara ovom sistemu:

$$\Gamma(E,V) = V^N\frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}(2mE)^{\frac{3N}{2}}$$

Raditi u formalizmu mikrokanonskog ansambla.

Zadatak 2. Razmatramo skup od N neinteragujućih, identičnih čestica u zapremini V, koje imaju kinetičku energiju oblika:

$$T(p) = ap$$

gde je a pozitivna konstanta, dok p predstavlja impuls čestice. U formalizmu kanonskog ansambla izračunati statističku sumu ovog sistema.

Zadatak 3. Za idealan klasičan gas od N molekula, statistička suma se može zapisati kao:

$$Z(N,T,V) = \frac{1}{N!}V^N Z_1^N$$

Uz pretpostavku da se kanonska statistička suma jednog molekula gasa može izraziti kao:

$$Z_1 = T^n$$

dokazati da se toplotni kapacitet definisan relacijom:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

za takav sistem ponaša u skladu sa relacijom:

$$C_V = nNk_B$$

Zadatak 4. Koristeći formalizam velikog kanonskog ansambla dokazati da važi relacija:

$$\langle N\rangle = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V}$$

gde je Ω veliki termodinamički potencijal a μ predstavlja hemijski potencijal.

Zadatak 5. Sistem se sastoji od N identičnih molekula idealnog gasa, energije E, koji se nalazi u d-dimenzionoj "kutiji" zapremine V. Odrediti entropiju, termičku i kaloričku jednačinu stanja sistema, ako je poznato da je fazna zapremina koja odgovara ovom sistemu:

$$\Omega(E,V,N) = V^N \frac{\pi^{\frac{d\cdot N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d\cdot N}{2}+1\right)}(2mE)^{\frac{d\cdot N}{2}}$$

Masa svakog molekula je m. Raditi u formalizmu mikrokanonskog ansambla.

Zadatak 6. Razmatramo sistem od N različitih neinteragujućih čestica, koje se mogu naći u tri energijska stanja sa energijama $E_1 = 0$, $E_2 = \epsilon$ i $E_3 = 2\epsilon$. Kanonska statistička suma jedne čestice je data sa:

$$Z_1 = 1 + e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{2\epsilon}{k_B T}}$$

Odrediti srednju energiju ovog sistema, koristeći formalizam kanonskog ansambla.

Zadatak 7. Idealan gas, u zapremini V, koji se sastoji od N identičnih jednoatomskih molekula nalazi se u kontaktu sa termostatom temperature T. Odrediti toplotni kapacitet sistema C_V ako je kanonska statistička suma jednog molekula data sa:

$$Z_1 = \frac{V}{h^3}(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}$$

Masa svakog molekula je m. Raditi u formalizmu kanonskog ansambla.

Zadatak 8. Razmatramo skup od N neinteragujućih, identičnih čestica u zapremini V, koje imaju kinetičku energiju oblika:

$$T(p) = ap^2$$

gde je a pozitivna konstanta, dok p predstavlja impuls čestice. U formalizmu kanonskog ansambla izračunati statističku sumu ovog sistema.

Zadatak 9. Odrediti entropiju $S(E,V,N)$ idealnog gasa sa N klasičnih monoatomskih čestica, energije E, koji se nalazi u d-dimenzionoj "kutiji" zapremine V. Odrediti kaloričku i termičku jednačinu stanja, podrazumevajući da je $N >> 1$. Raditi u formalizmu mikrokanonskog ansambla.

Zadatak 10. Razmatramo sistem koji se sastoji od N nezavisnih jednodimenzionih harmonijskih oscilatora sa frekvencijom ω, masom m, i pod konstantnim uticajem gravitacionog ubrzanja intenziteta g dužpravca oscilovanja. Hamiltonijan jednog oscilatora je dat sa:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + mgq$$

gde je p impuls, a q prostorna koordinata oscilatora. Odrediti kanonsku particionu funkciju ovog sistema kao i njegovu slobodnu energiju.

Zadatak 11. Posmatramo sistem koji se sastoji od N čestica koje imaju spin 1/2. Čestice se nalaze u magnetnom polju jačine h. Čestice su fiksirane u svojim pozicijama i poseduju magnetni moment μ. Hamiltonijan takvog sistema je dat sa:

$$H = -\mu h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

gde su $\sigma_i = \pm 1$. Odrediti entropiju, energiju i toplotni kapacitet sistema. Raditi u formalizmu mikrokanonskog ansambla.

Literatura

[1] *Božidar Milić, Sava Milošević, Ljiljana Dobrosavljević, Zbirka zadataka iz teorijske fizike III deo - Statistička fizika, Naučna knjiga, Beograd (1979).*

[2] *Ryogo Kubo, Statisticcal Mechanics: An Advanced Course with Problems and Solutions, North-Holland Publishing Company (1965).*

[3] *Michele Cini, Francesco Fucito, Mauro Sbragaglia, Solved Problems in Quantum and Statistical Mechanics, Springer (2012).*

[4] *Vladimir Miljković, Zbirka zadataka iz Statističke fizike, Beorad (2011).*

Kvantne statistike i ansambli

PART

V

11 Kvantne statistike

Zadatak 1. Dokazati da za idealan nerelativistički gas važi:

$$pV = \frac{2}{3}\langle E \rangle$$

ukoliko se čestice gasa opisuju Fermi-Dirakovom statistikom.

Rešenje:

Za čestice opisane Fermi-Dirakovom statistikom velika statistička suma je data kao:

$$\Xi = \prod_f \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_f - \mu)}\right) \tag{11.1}$$

Na osnovu toga veliki termodinamički potencijal je dat sa:

$$\Omega = -k_B T \ln \Xi = -k_B T \sum_f \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon_f - \mu)}\right) = -\frac{1}{\beta}\sum_f \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon_f - \mu)}\right) \tag{11.2}$$

Dalje, vršimo prelazak sa sume na integral[18] i dobijamo:

[18] *Kontinualna aproksimacija*

$$\Omega = -\frac{V}{\beta h^3}\int \ln\left(1 + e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)}\right) d^3p \tag{11.3}$$

Prelaskom na sferni koordinatni sistem imamo:

$$\Omega = -\frac{4\pi V}{\beta h^3}\int_0^\infty p^2 \ln\left(1 + e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)}\right) dp \tag{11.4}$$

1

Uvodeći:

$$p = \sqrt{2m\epsilon_p}, dp = 2^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \epsilon_p^{-\frac{1}{2}} d\epsilon_p \tag{11.5}$$

dobijamo:

$$\Omega = -\frac{4\pi V}{\beta h^3}\int_0^\infty 2m\epsilon_p \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}\right) 2^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \epsilon_p^{-\frac{1}{2}} d\epsilon_p \tag{11.6}$$

Velika statistička suma za kvantni ansambl je definisana sa:

$$\Xi = \sum_{N=0}^\infty \sum_n \lambda^N e^{-\beta E_{N,n}}, \lambda = e^{\beta\mu} \tag{11.7}$$

Odredimo sledeći izvod:

$$\left(\frac{\partial \Xi}{\partial \beta}\right)_{\lambda,V} = \sum_{N=0}^\infty \sum_n \lambda^N (-E_{N,n}) e^{-\beta E_{N,n}} = -\Xi\langle E \rangle \tag{11.8}$$

Na osnovu prethodnog rezultata važi:

$$\langle E\rangle = -\frac{1}{\Xi}\left(\frac{\partial \Xi}{\partial \beta}\right)_{\lambda,V} = -\left(\frac{\partial(\ln \Xi)}{\partial \beta}\right)_{\lambda,V} = \left(\frac{\partial(\beta\Omega)}{\partial \beta}\right)_{\lambda,V} \tag{11.9}$$

Iz (11.6) dobija se da važi:

$$\begin{aligned} \beta\Omega &= -\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty 2m\epsilon_p \ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon_p-\mu)}\right)2^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}\epsilon_p^{-\frac{1}{2}}d\epsilon_p \\ \beta\Omega &= -VC\int_0^\infty \epsilon_p^{\frac{1}{2}}\ln\left(1+\lambda e^{-\beta\epsilon_p}\right)d\epsilon_p \end{aligned} \tag{11.10}$$

gde je uvedena oznaka:

$$C = \frac{4\pi V}{h^3}2m2^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}} \tag{11.11}$$

Na osnovu (11.9) i koristeći (11.10) dobija se:

$$\langle E\rangle = -VC\int_0^\infty \frac{\epsilon_p^{\frac{1}{2}}(-\epsilon_p)\lambda e^{-\beta\epsilon_p}}{1+\lambda e^{-\beta\epsilon_p}}d\epsilon_p \tag{11.12}$$

odnosno:

$$\langle E\rangle = -VC\int_0^\infty \frac{\epsilon_p^{\frac{1}{2}}(-\epsilon_p)\lambda e^{-\beta\epsilon_p}}{1+\lambda e^{-\beta\epsilon_p}}\cdot\frac{\frac{1}{\lambda}e^{\beta\epsilon_p}}{\frac{1}{\lambda}e^{\beta\epsilon_p}}d\epsilon_p = VC\int_0^\infty \frac{\epsilon_p^{\frac{3}{2}}}{1+\frac{1}{\lambda}e^{\beta\epsilon_p}}d\epsilon_p \tag{11.13}$$

Određujemo pritisak koristeći definiciju: 1

$$p = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu} \tag{11.14}$$

i dobijamo na osnovu (11.10):

$$p = \frac{C}{\beta}\int_0^\infty \epsilon_p^{\frac{1}{2}}\ln\left(1+\lambda e^{-\beta\epsilon_p}\right)d\epsilon_p \tag{11.15}$$

Vršimo parcijalnu integraciju prethodne relacije koristeći:

$$u = \ln\left(1+\lambda e^{-\beta\epsilon_p}\right), dv = \epsilon_p^{\frac{1}{2}}d\epsilon_p \tag{11.16}$$

i dobijamo:

$$p = \frac{2}{3}C\int_0^\infty \frac{\epsilon_p^{\frac{3}{2}}\lambda e^{-\beta\epsilon_p}}{1+\lambda e^{-\beta\epsilon_p}}d\epsilon_p \tag{11.17}$$

odnosno:

$$p = \frac{2}{3}C\int_0^\infty \frac{\epsilon_p^{\frac{3}{2}}\lambda e^{-\beta\epsilon_p}}{1+\lambda e^{-\beta\epsilon_p}}\cdot\frac{\frac{1}{\lambda}e^{\beta\epsilon_p}}{\frac{1}{\lambda}e^{\beta\epsilon_p}}d\epsilon_p = \frac{2}{3}C\int_0^\infty \frac{\epsilon_p^{\frac{3}{2}}}{1+\frac{1}{\lambda}e^{\beta\epsilon_p}}d\epsilon_p \tag{11.18}$$

Poređenjem relacija (11.13) i (11.18) zaključujemo da važi:

$$pV = \frac{2}{3}\langle E\rangle \quad \square \tag{11.19}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. Dokazati da za idealan nerelativistički gas važi:

$$pV = \frac{2}{3}\langle E\rangle$$

ukoliko se čestice gasa opisuju Boze-Ajnštajnovom statistikom.

Rešenje:

Za čestice opisane Fermi-Dirakovom statistikom velika statistička suma je data kao:

$$\Xi = \prod_f \left(1 - e^{-\beta(\epsilon_f - \mu)}\right)^{-1} \tag{11.20}$$

Na osnovu toga veliki termodinamički potencijal je dat sa:

$$\Omega = -k_B T \ln \Xi = k_B T \sum_f \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_f-\mu)}\right) = \frac{1}{\beta}\sum_f \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_f-\mu)}\right) \tag{11.21}$$

Dalje, vršimo prelazak sa sume na integral. Ovde treba primetiti da kada $\mu \to 0$, članovi koji odgovaraju impulsu $\vec{p} \neq 0$ postižu velike vrednosti. Pošto integracija u impulsnom prostoru u tački $\vec{p} \neq 0$ ne daje doprinos ova članove je potrebno prikazati u vidu odvojenog sabirka, kako bi prelaz sa sume na integral bio korektan. U tom slučaju zapisujemo:

$$\Omega = \frac{1}{\beta}\ln(1-\lambda) + \frac{1}{\beta}\sum_{\vec{p}\neq 0} \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}}-\mu)}\right) \tag{11.22}$$

2

a prelaz sa sume na integral je dat sa:

$$\beta\Omega = \ln(1-\lambda) + \frac{V}{h^3}\int \ln\left(1 - e^{-\beta(\frac{p^2}{2m}-\mu)}\right) d^3p \tag{11.23}$$

odnosno posle prelaska na sferni koordinatni sistem:

$$\beta\Omega = \ln(1-\lambda) + \frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty p^2 \ln\left(1 - e^{-\beta(\frac{p^2}{2m}-\mu)}\right) dp \tag{11.24}$$

Ostatak proračuna je u potpunosti identičan rezultatima već prikazanim u prethodnom zadatku tako da ovde nema potrebe da dalje raspisujemo rešenje. Lako se dolazi do zaključka da će i ovde da važi:

$$pV = \frac{2}{3}\langle E\rangle \quad \square \tag{11.25}$$

što je trebalo dokazati.

Zadatak 3. Idealni gas od N bozona nalazi se u zapremini V. Neka N_0 označava broj čestica u najnižem jednočestičnom stanju $\epsilon_0 = 0(p = 0)$ a N_1 broj čestica u svim ostalim stanjima ($p \neq 0$). Dokazati da je hemijski potencijal negativna nerastuća funkcija temperature.

Rešenje:

Ukupan broj čestica je određen relacijom:

$$N = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1} \tag{11.26}$$

odnosno:

$$N = \frac{1}{e^{\beta\mu} - 1} + \sum_{\vec{p}\neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1} = N_0 + N_1 \tag{11.27}$$

Imamo efektivno da je $N = N(\mu, T)$ odakle za $N = const.$ važi:

$$\frac{d\mu}{dT} = -\frac{\frac{\partial N}{\partial T}}{\frac{\partial N}{\partial \mu}} \tag{11.28}$$

Dobija se da je: (3)

$$\frac{d\mu}{dT} = -\frac{-\frac{\mu}{k_B T^2} e^{-\frac{\mu}{k_B T}} \frac{1}{\left(e^{\frac{\mu}{k_B T}} - 1\right)^2} + \sum_{\vec{p}\neq 0} \frac{e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_B T^2}} \frac{\epsilon-\mu}{k_B T}}{\left(e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_B T}} - 1\right)^2}}{\frac{\frac{1}{k_B T} e^{-\frac{\mu}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\mu}{k_B T}} - 1\right)^2} + \sum_{\vec{p}\neq 0} \frac{\frac{1}{k_B T} e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_B T}} - 1\right)^2}} \tag{11.29}$$

Na osnovu prethodnog izraza zaključuje se da važi;

$$\frac{d\mu}{dT} \leq 0 \quad \square \tag{11.30}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. Dokazati da ako se relacija:

$$\langle n_f \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_f - \mu)} \pm 1}$$

može aproksimirati Bolcmanovom formulom:

$$\langle n_f \rangle \approx e^{-\beta(\epsilon_f - \mu)}$$

da je:

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

identičnih čestica mase m koje čine idealni gas mnogo manja od srednjeg rastojanja među česticama.

Rešenje:

Navedena aproksimacija važi kada je:

$$\beta(\epsilon_f - \mu) >> 1 \tag{11.31}$$

(4)

odnosno kada:

$$(\epsilon_f - \mu) >> k_B T \tag{11.32}$$

Pošto su nivoi ϵ_f fiksirani mora da $\mu < 0$ odnosno da važi:

$$e^{\frac{\mu}{k_B T}} << 1 \tag{11.33}$$

Određujemo:

$$N = \sum_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle = \frac{V}{h^3} \int e^{-\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} d^3 p = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{\infty} e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)} p^2 dp \tag{11.34}$$

Posle smene $p = \sqrt{2m\epsilon_p}$ dobija se:

$$N = \frac{4\pi V}{h^3} 2^{\frac{1}{2}} m^{\frac{3}{2}} e^{\beta\mu} \int_0^{\infty} \epsilon_p^{\frac{1}{2}} e^{-\beta\epsilon_p} d\epsilon_p \tag{11.35}$$

4

Rešavanjem se dobija:

$$N = \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{2}{3}} e^{\beta\mu} = e^{\beta\mu} \frac{1}{\lambda_T^3} \tag{11.36}$$

Definisanjem srednjeg rastojanja d iz $d^3 = \frac{V}{N}$ dobija se:

$$\frac{\lambda_T^3}{d^3} = e^{\beta\mu} \tag{11.37}$$

Koristeći (11.33) imamo da je:

$$\lambda_T << d \quad \square \tag{11.38}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 5. Odrediti fluktuacije broja chestica definisane sa:

$$D(N) = k_B T \frac{\partial}{\partial\mu} \left(\sum_f \langle n_f \rangle \right)$$

za kvantni idealni gas fermiona, tako da su izrazhene preko srednjeg broja popunjenosti jednochestichnih energijskih nivoa.

Rešenje:

Polazimo od definicije srednjeg broja popunenosti energijskih nivoa fermiona:

$$\sum_f \langle n_f \rangle = \sum_f \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \tag{11.39}$$

5

Diferenciramo prethodnu relaciju po hemijskom potencijalu i dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \left(\sum_f \langle n_f \rangle \right) = \sum_f \frac{\beta e^{\beta(\epsilon-\mu)}}{\left(e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1 \right)^2} \tag{11.40}$$

Prethodni rezultat ćemo malo modifikovati:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sum_f \langle n_f\rangle\right) &= \sum_f \frac{\beta e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1-1}{\left(e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1\right)^2} \\
\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sum_f \langle n_f\rangle\right) &= \beta\sum_f \left(\frac{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}{\left(e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1\right)^2} - \frac{1}{\left(e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1\right)^2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sum_f \langle n_f\rangle\right) &= \beta\sum_f \left(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} - \frac{1}{\left(e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1\right)^2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sum_f \langle n_f\rangle\right) &= \beta\sum_f \left(\langle n_f\rangle - \langle n_f\rangle^2\right)
\end{aligned} \tag{11.41}$$

5

Na osnovu toga se dobija:

$$D(N) = k_B T \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sum_f \langle n_f\rangle\right) = \sum_f \langle n_f\rangle\left(1 - \langle n_f\rangle\right) \tag{11.42}$$

Zadatak 6. Za kvantni idealni gas fermiona odrediti izraz za entropiju, izraženu preko srednjeg broja popunjenosti jednočestičnih energijskih nivoa.

Rešenje:

Za fermione važi:

$$\langle n_f\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_f-\mu)}+1} \tag{11.43}$$

Veliki termodinamički potencijal je:

$$\Omega = -\frac{1}{\beta}\sum_f \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon_f-\mu)}\right) \tag{11.44}$$

Odredjujemo entropiju koristeći definiciju:

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial T} \tag{11.45}$$

odakle se dobija:

$$S = k_B\left(\sum_f \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon_f-\mu)}\right) + \beta\sum_f \frac{(\epsilon_f-\mu)e^{-\beta(\epsilon_f-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon_f-\mu)}}\right) \tag{11.46}$$

6

Iz (11.43) dobijamo:

$$\frac{1-\langle n_f\rangle}{\langle n_f\rangle} = e^{\beta(\epsilon_f-\mu)} \tag{11.47}$$

odnosno:

$$\beta(\epsilon_f-\mu) = \ln\left(\frac{1-\langle n_f\rangle}{\langle n_f\rangle}\right) \tag{11.48}$$

Izraz za entropiju na osnovu toga se može lako zapisati u obliku:

$$S = k_B\left(-\sum_f \langle n_f\rangle \ln\langle n_f\rangle - \sum_f (-1 + \langle n_f\rangle)\ln(1-\langle n_f\rangle)\right) \tag{11.49}$$

Zadatak 7. Za idealni fotonski gas, koji se nalazi u šupljini, naći srednji broj fotona u jediničnoj zapremini i unutrašnju energiju po jediničnoj zapremini. Uzeti da je degeneracija $g = 2$.

Rešenje:

Za fotonski gas za koji je $\mu = 0$ imamo:

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_{\vec{p}}} - 1} \tag{11.50}$$

Srednji broj fotona je dat sa:

$$\langle N \rangle = g \sum_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle \tag{11.51}$$

Dalje se računa:

$$\langle N \rangle = 2 \frac{V}{h^3} \int \frac{d^3 p}{e^{\beta c p} - 1} \tag{11.52}$$

Prelaskom na sferni koordinatni sitem i smenom $p = \frac{\hbar \omega}{c}$ dobija se: 7

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\beta^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \sim T^4 \tag{11.53}$$

Unutrašnja energija se određuje kao:

$$U = g \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle \tag{11.54}$$

Sprovođenjem sličnog računa kao prethodno dobija se:

$$\frac{U}{V} \sim T^4 \tag{11.55}$$

Zadatak 8. Dokazati da je unutrašnja energija idealnog Boze-ovog gasa data sa:

$$U = \frac{3}{2} k_B T V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta l \mu}}{l^{5/2}} \tag{11.56}$$

kada je degeneracija slaba ($g = 1$).

Rešenje:

Unutrašnju energiju određujemo polazeći od:

$$U = \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle = \sum_{\vec{p}} \frac{\epsilon_{\vec{p}}}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1} \tag{11.57}$$

Prelaskom na kontinualnu aproksimaciju dobijamo: 8

$$U = \frac{V}{h^3} \int \frac{\epsilon_{\vec{p}}}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \mu)} - 1} d^3 \vec{p} \tag{11.58}$$

ili za dati idealni gas:

$$U = \frac{V}{h^3} \int_0^\infty \frac{\frac{p^2}{2m}}{e^{\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)}} p^2 dp \tag{11.59}$$

Korišćenjem smene:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{p^2}{2m} \\ p &= \sqrt{2m\epsilon} \\ dp &= (2)^{-\frac{1}{2}} m^{1/2} \epsilon^{-1/2} d\epsilon \end{aligned} \tag{11.60}$$

Dobijamo dalje:

$$U = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \tag{11.61}$$

Dalje se koristimo razvojem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ \frac{1}{1-x} - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ \frac{x}{1-x} &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \end{aligned} \tag{11.62}$$

Izraz pod integralom (11.61) izmenimo:

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}} \cdot \frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} = \frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} \tag{11.63}$$

8

i korišćenjem (11.62) dobijamo:

$$\frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} e^{l\beta(\mu-\epsilon)} \tag{11.64}$$

Dalje za unutrašnju energiju dobijamo:

$$U = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^\infty \epsilon^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} e^{l\beta(\mu-\epsilon)} d\epsilon = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} e^{l\beta\mu} \int^\infty \epsilon^{3/2} e^{-\beta l\epsilon} d\epsilon \tag{11.65}$$

Uvođenjem smene:

$$\begin{aligned} \beta l\epsilon &= x \\ d\epsilon &= \frac{dx}{\beta l} \end{aligned} \tag{11.66}$$

dobijamo za unutrašnju energiju:

$$\begin{aligned} U &= \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{l\beta\mu}}{\beta^{5/2} l^{5/2}} \underbrace{\int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx}_{\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}} \\ U &= \frac{3}{2} k_B T V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta l\mu}}{l^{5/2}} \end{aligned} \tag{11.67}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 9. Stanje termodinamičke ravnoteže kristalne rešetke od N atoma, koja osciluje, približno je ekvivalentno stanju od $3N$ neinteragujućih identichnih kvantno-mehaničkih oscilatora. Postoji:

$$dn_\omega = \begin{cases} \frac{9N}{\omega_D^3}\omega^2 d\omega, & \omega < \omega_D \\ 0, & \omega > \omega_D. \end{cases} \tag{11.68}$$

oscilatora sa frekvencijom između ω i $\omega + d\omega$. Debajevu frekvenciju ω_D dobijamo iz:

$$\int_0^{\omega_D} dn_\omega = 3N \tag{11.69}$$

Odrediti toplotni kapacitet kristalne rečetke.

Rešenje:

Energija harmonijskog oscilatora nam je poznata i daje se kao:

$$E = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right) \tag{11.70}$$

Srednju energiju bismo odredili kao:

$$\begin{aligned} \langle E\rangle &= \int_0^\infty E dn_\omega = \int_0^{\omega_D} \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)\frac{9N}{\omega_D^3}\omega^2 d\omega \\ &= \frac{9N}{\omega_D^3}\int_0^{\omega_D} \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)\omega^2 d\omega \end{aligned} \tag{11.71}$$

Toplotni kapacitet je dat sa:

$$C_V = \left(\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}\frac{\partial\beta}{\partial\beta} = -k_B\beta^2\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} \tag{11.72}$$

Za toplotni kapacitet dobijamo:

$$\begin{aligned} C_V &= -k_B\beta^2\frac{9N\hbar}{\omega_D^3}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\int_0^{\omega_D}\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\omega^3 d\omega\right) \\ &= k_B\beta^2\frac{9N\hbar^2}{\omega_D^3}\int_0^{\omega_D}\frac{\omega^4 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2}d\omega \end{aligned} \tag{11.73}$$ 9

Uvođenjem smene:

$$\begin{aligned} \beta\hbar\omega &= x \\ d\omega &= \frac{dx}{\hbar\omega} \\ \beta\hbar\omega_D &= \frac{\hbar\omega_D}{k_B T} = \frac{T_D}{T} \end{aligned} \tag{11.74}$$

gde smo uveli i tzv. Debajevu temperaturu T_D. Dobijamo na kraju posle uvođenja smene izraz za toplotni kapacitet kristalne rešetke:

$$C_V = \frac{9Nk_B}{\omega_D^3\beta^3\hbar^3}\int_0^{\frac{T_D}{T}}\frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \tag{11.75}$$

koji se može analizirati za slučaj niskih i visokih temperatura.

12 Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Odrediti fluktuacije broja čestica definisane sa:

$$D(N) = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sum_f \langle n_f \rangle \right)$$

za kvantni idealni gas bozona, tako da su izražene preko srednjeg broja popunjenosti jednočestičnih energijskih nivoa.

Zadatak 2. Za kvantni idealni gas bozona odrediti izraz za entropiju, izraženu preko srednjeg broja popunjenosti jednočestičnih energijskih nivoa.

Literatura

[1] *Božidar Milić, Sava Milošević, Ljiljana Dobrosavljević, Zbirka zadataka iz teorijske fizike III deo - Statistička fizika, Naučna knjiga, Beograd (1979).*

Programi i numerika

PART VI

13 Programi

Zadatak 1. Napraviti program koji pravi procenu apsolutne greške Stirlingove aproksimacije za razne vrednosti N.

Rešenje:

```
from math import *

N_vrednosti=[10,200,2000,20000,200000]

print("N \t log(N!) \t\t N*log(N)-N \t\t Apsolutna greska")
for i in N_vrednosti:
    print(str(i)+'\t'+str(log(factorial(i)))+'\t'+str(i*log(i)-i)+'\t'+str(
    abs(log(factorial(i))-(i*log(i)-i))))
```

.

Rezultat programa je:

```
N      log(N!)        N*log(N)-N         Apsolutna greska
10   15.104412573075516   13.02585092994046  2.0785616431350 55
200  863.2319871924054  859.6634733096073  3.568513882798129
2000    13206.524350513806   13201.804919084165   4.71943142964119
20000  178075.62173719867   178069.75105072255   5.870686476118863
200000    2241221.551081307  2241214.529106035  7.021975272335112
```

.

Jedan matematički minimum

PART VII

14 Poasonov integral

Rešavamo integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \tag{14.1}$$

Kvadrat integrala je:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)} \tag{14.2}$$

Prelaskom na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \\ y &= \rho \cos \varphi \\ x^2 + y^2 &= \rho^2 \end{aligned} \tag{14.3}$$

i korišćenjem Jakobijana transformacije imamo:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-\rho^2} = \pi \tag{14.4}$$

Na osnovu toga lako se zaključuje da je rešenje Poasonovog integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{14.5}$$

Možemo napraviti i jednu jako korisnu generalizaciju uvođenjem odgovarajućeg parametra:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{14.6}$$

što se lako dokazuje.

15 Diferenciranje po parametru

Polazimo od:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{15.1}$$

Prethodni izraz ćemo diferencirati po parametru α:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{15.2}$$

i dobijamo:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \alpha^{-\frac{3}{2}} \tag{15.3}$$

odnosno kao rešenje integrala imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-\frac{3}{2}} \tag{15.4}$$

Nastavljanjem diferenciranja po parametru novodobijenog integrala može se lako pokazati da važi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-\alpha x^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}} \tag{15.5}$$

Lako se mogu napraviti generalizacije za npr. vrednost $\alpha = 1$ kada imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{15.6}$$

i mnogi drugi proračuni.

16 Faktorijel

Neke korisne relacije faktorijela:

$$\begin{aligned}
(2n-1)!! &= \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
7!! &= 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \\
(2n)!! &= \prod_{k=1}^{n}(2k) \\
8!! &= 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \\
(2n)! &= (2n)!!(2n-1)!! \\
!n &= 0! + 1! + ... + (n-1)!
\end{aligned} \tag{16.1}$$

17 Gama funkcija

Definicija Gama funkcije se obično daje u obliku:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \tag{17.1}$$

Korisne osobine Gama funkcije:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\
\Gamma(n) &= (n-1)!
\end{aligned} \tag{17.2}$$

Odredimo dalje:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt}_{\text{smena } t=x^2} = 2\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{17.3}$$

Dalje, lako se određuje:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{17.4}$$

18 Integral ζ

Odrediti rešenje integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \tag{18.1}$$

Rešenje određujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx &= \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\frac{e^{-x}}{e^{-x}}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}dx \\
&= \int_0^\infty dx x^3 e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty dx x^3 e^{-(n+1)x} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^\infty dx x^3 e^{-nx}}_{\text{smena}\quad nx=t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{dt}{n}\frac{t^3}{n^3}e^{-t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\int_0^\infty dt t^3 e^{-t} \\
&= \zeta(4)\Gamma(4) \\
&= \frac{\pi^4}{90}3! = \frac{\pi^4}{15}
\end{aligned} \tag{18.2}$$

gde smo rešenje traženog integrala dobili preko Rimanove Zeta funkcije i Gama funkcije.